[redacted]

伊藤先生の講義

物理学概論A

— 粒子の物理学 —

1　科学の手本となったEuclid幾何学

古代バビロニア，エジプト，インド人は数学上の多くの事実（たとえばピタゴラス定理に関すること，2次方程式の数値的解法，円錐曲線など）を知っていたが，これらを論理的に系統化しようとはしなかった。1) アレキサンドリアのエウクリデスは図形に関する多くの性質を少数の仮定（公理）から出発して，系統的に導き出す論理体系を作りあげた（幾何原論　ストイケイア Στοιχεια）　諸君が学んだ幾何学がこれである。そして，このやり方が後世，自然科学構成の手本となった。

先ずニュートンは，ケプラー，ホイヘンス，ガリレイ等によって既に発見されていた力学現象（落下，慣性，振子の等時性，遠心力，惑星運動）に関する個々の法則(2)を運動の3法則（と万有引力の法則）から出発し，推論により系統的に導いた。この結果はプリンキピア(3)でユークリッド幾何原論の形式で述べられている。バラバラな法則の集積ではなくて，運動の3法則を公理とし，それからの定理として力学上の諸法則を導いたこの論理体系がNewton力学である。

高校で学んだ電磁気の基本法則について量的な研究がなされたのは，キャベンディッシュによるクーロンの法則の発見（1772）（年表参照）から，ファラデーによる電磁誘導の法則の発見（1831）にいたる約60年間である。(4) この間に発見された個々の法則を，ある根本仮定（公理）から出発して系統的に導く論理体系を作り上げたのがマックスウェル（1861）である。これがMaxwellの電磁気学である。この場合の公理はMaxwell方程式という連立偏微分方程式である。この公理から既知の法則が系統的に導かれる

---

1)　小堀憲：数学史（朝倉書店）など参照

2)　F.カジョリ：物理学の歴史.（上.中.下）　武谷，一瀬訳（東京図書）
広重徹：物理学史.（I，II）（培風館）
H.バターフィールド他：近代科学の歩み　菅井訳（岩波新書）
E.マッハ：マッハ力学.　伏見訳（講談社）など参照.
なお数頁後の年表参照（不完全なものである.各自自己用のより完全なものを作れ）

3)　I.ニュートン：プリンシピア（上.下）岡邦彦訳（春秋文庫）

4)　矢島祐利：電磁気学史（岩波全書）など参照.

だけでなく、電界、磁界が光と同じ速さで空間にひろがってゆくこと、即ち電磁波が存在するはずであるという結論、更にこの波はあらゆる点で光波と同じ性質の波であるという結論が導かれた。1888年ヘルツがこの波を実際に発見し、それが光と同じ法則に従うことを実験によって確認した。以後光学は電磁気学に合流することになった。

バラバラな情報ならそれらのおのおのについて真偽をたしかめなければならない。これに反して互に論理で結ばれた知識の体系では、ある知識の正しさをたしかめることは他の知識の正しさを補強することになる。簡単な仮定（公理）から推論によって多くの結論を導き出し、それらが簡単に検証できるユークリット幾何は、科学の素朴な雛型であり、手本とされたのは当然であろう。勿論個々の問題を解くのに近代幾何学がユークリッド幾何に優るのは当然であるが、だからといって科学の素朴なひな型としてのユークリッド幾何を過少評価すべきではない。アインシュタインはユークリッド幾何について「この驚嘆に値する理性の作品は人間の精神にその後の活動に対する自信を与えるものでした。その青年時代にこの作品に感激を覚えることのできなかった人は理論的研究者としては生れついていなかったのです」(1)と言っている。大学では高校ではできなかった体系化された物理学を学び、新しく作り上げることをやりたいのである。ただ、いきなり体系化された物理では、とまどいもあろうと思われるので、それへのIntroductionが「物理学序説A」の目的である。

昔の人々は公理とは「証明しなくても誰にも正しいと認められる命題」、即ち「自明の理」であると考えた。しかし「2点を通る直線は唯一つ」は自明であるとしても、元来経験的に得られた運動の法則やMaxwellの偏微分方程式まで自明と考えるのは無理である。数学でも物理でも公理は推論の出発点となる根本仮定のことである。物理では公理の正しさは、それから導かれたあらゆる結論がすべて実験と一致するか否かで判定される。公理としての運動の法則やMaxwell方程式の正しさはそれから導かれたあらゆる結果が実験と一致したとき間接的に証明されたことになり、若し本質的な不一致が一例でも現われれば修正または廃棄されることになる(2)

---

1) 湯川監修：アインシュタイン選集3（共立社） p334「理論物理学の方法について」

2) 19世紀から20世紀にかけて光速に近い速さの運動、原子的尺度の現象で、力学電磁気学の結論との本質的な不一致が見出され、相対論や量子論が生れたが、これらにはNewton力学やMaxwell電磁気学はある極限として含まれている。

これに反してユークリッド幾何学の正しさは我々の経験を超えたものであるとすら考えられたこともあった(1)。しかし19世紀になってユークリッド幾何だけが唯一の幾何学ではなくてユークリッドとは異る公理から出発しても同様に矛盾のない幾何学の体系が得られることがわかり(2)幾何学の公理も1種の仮定にすぎぬことがわかると共に、「我々が住むこの空間が本当にユークリッド幾何学に従うのかどうか」が問われるようになった。こうなると幾何学の公理も物理の公理と同じ立場になる。「公理から出発して結論に到る論理体系を作るのが目的であって得られた結論がこの世の事実に対応するかどうか問題にしない」のなら問題はないが、若し「現に我々が住むこの空間が特定の幾何学に従う」と断定するなら、それは自然に関してある仮説をたてたことになり、他の物理上の仮説と同様当然実験物理の全力をあげての厳しい検証に曝されることになろう。このように幾何学には「純粋数学」という面のほかに「空間物理」という面がある。このことをはっきり認識して今世紀のはじめ「時空間の物理」として相対論を創ったアインシュタインは「数学の命題は、それらが現実と関連をもつかぎりに於て確実ではないのであり、それらが確実である限りに於て現実との関連をもたないのである」(3)といい、また「幾何学を実用上の剛体相互間の空間的配置の法則性についての科学として理解する限りでは、それは物理学の最も古い分科と見なさるべきである」(4)といっている。

2　物理の厂史概略

年表をみながら話すつもり。　　略す

---

1) 例えばラッセル：西洋哲学史（下）p189［C.カントの空間論と時間論の項参照］
訳．市井（みすず書房）

2) 小堀：数学史 p212－213．遠藤真二：時間・空間（河出書房）（第9章非ユークリッド
リワノワ著：ロバチェフスキーの世界 松野訳（東京図書）
幾何学と場の理論の項）．佐々木重夫：幾何入門（岩波新書）（第10章非ユークリッド幾何学の雛形）：　数学辞典（岩波）「非ユークリッド幾何学」の項参照．

3) アインシュタイン選集3　p277「幾何学と経験」

4) 同上．

	1500年代	1600年代	
力	45 コペルニクス 地動説 83 ガリレイ 等時性 86 ステビン 力の平行四辺形則	04 ガリレイ 落下法則 09 ケプラー則 20 デカルト 慣性	57 ホイヘンス 振子時計 60 フックの法則 73 ホイヘンス 遠心力理論 87 万有引力 運動法則 ニュートン「プリンキピア」
熱			62 ボイルの法則
原・化			60 ボイル 元素概念 90 シュタール フロジストン説
電		00 ギルバート 磁石研究	
光		08 リッペルシャイム 望遠鏡 20 スネル 屈折法則	60 グリマルディ 回折現象 61 フェルマー原理 66 ニュートン 分散現象 69 バルトリン 複屈折 75 レーマー 光速度 78 ホイヘンス 波動説
数	フェラリ 四次方程式解 タルタリア カルダノ 三次方程式解	14 ナピア 対数 24 ブラック 常用対数 26 フェルマー 極大小研究 記号代数 37 デカルト 解析幾何 座標の導入	54 フェルマ・パスカル 確率論 75~84 ライプニッツ ニュートン 微積分 83 関孝和 行列式（伏題）
その他	09 エラスムス「愚神礼讃」 13 マキャベリー「君主論」 18 トーマスモア「ユートピア」	00 ブルーノ火刑 05 F.ベーコン「学問の進歩」〈帰納法重視〉 16 デカルト「方法序説」 47 ホッブス「リバイアサン」	77 スピノザ没 80 ロック「人間悟性論」
	17 ルター 宗教改革 21 マゼラン 世界周航 30 ウェストワリヤ和議 54 英国教会 88 アルマダ海戦 98 ナント勅令	20 メーフラワ号 プリマスへ 45 ピュリタン革命	88 名誉革命
	53 エリザベスⅠ	03 ジェームスⅠ 25 チャールスⅠ 45 クロムエル	60 チャールズⅡ 81 ジェームスⅡ 88 ウイリアム
		10 ルイ 13 43 ルイ 14	
		米（植民時代）	
		00 関ヶ原 39 鎖国	
	室町 73 安土桃山	03 徳川	88 元禄

幾何学的

力学.
解析的扱い

	1700年代	
力	43 ダランヘ 原理 波動方程式 44 モーペルチュイ 最小作用の原理 変分法 自然の効果は極小をなす極値の原則に従う	53 D.ベルヌーイ 弦振動 55 オイラー 流体方程式 60 オイラー 剛体方程式 2階 微分方程式へ 88 ラグランジュ「解析力学」 98 キャベンディシュ 万有引力定数G測定
熱	05 ニューコメン 熱機関 42 セルシウス 摂氏目盛	61 潜熱 熱容量 発見 98 ラムフォード 熱エネルギー説
原・化	39 ベルヌーイ 気体運動論式	72 ラボアジエ 質量不変 99 プルースト 定比例則
電	29 グレー 電気伝導 33 デュフェー 2種の電気 45 クライス ライデンびん 47 フランクリン 流体説	52 フランクリン 雷の本体 53 カントン 静電誘導 72 キャベンディシュ 2乗反比例 80 ガルバニ 生物電気 [illegible] 99 ボルタ 電池
光	04 ニュートン「光学」粒子説	
数	13 J.ベルヌイ 大数の法則 15 テーラー展開 29 Γ関数 30 ドモアブルの定理 オイラー 40 e^{ix}のオイラーの公式 50 クラメル 行列式による方程式の解	66 オイラー 変分法 72 オイラー B関数 80 モンジュ 画法幾何 84 ルジャンドル 関数 99 ラプラス「天体力学」 ラプラス方程式 99 ガウス 代数学基本定理
その他	37 ヒューム「人間本性論」	62 ルソー 社会契約論 81 カント 純粋理性批判 (時間空間論)
		73 ボストンティーパーティー 75 米独立戦 76 米独立宣言 80 ワット 蒸気機関 87 米憲法 89 ワシントン大統領 89 仏革命 99 ナポレオン クーデター
	02 女王アン 14 ジョージI 27 ジョージII	60 ジョージIII
	15 ルイ15世	74 ルイ16世 92
	植民地時代	独立戦争時代
		74 解体新書
	13 16 享保 33	

1800年代

偏微分方程式(?)
34 ハミルトン原理
35 コリオリ力
42 マイヤー エネルギー保存 第一法則
42 ドプラー効果
46 ルブリエ 海王星予言と発見
83 マッハ 力学批判
87 オポルッアー 日月蝕をB.C 二〇七年迄計算

02 ゲールサック 気体熱膨脹
16 ラプラス Cp Cvの法則
19 デュロンプティ則
22 フーリエ 熱伝導論
24 カルノー 効率
43 ジュール Jの測定
50 クラウジウス 第二法則
54 シールトムソン 効果
65 クラウジウス エントロピー 増大
75 ファンデルワールの式
76 相律
77 ボルツマン 第二法則の統計的解釈 ギッブス

88 ルシャトリエ則

03 ドルトン 倍数比例則 原子説
08 ゲールサック 気体反応則
11 アボガドロ 分子説
23 ブラウン運動 発見
32 グレアム 拡散則
34 ファラデー 電解則
陰極線発見
58 プリュッカー
59 マクスウェル 速度分布
64 グルドベルクワーゲ 質量作用則
65 ロシュミット数決定
69 メンデレフ 周期律
84 エジソン 熱電子
85 バルマーの式
86 ゴールドシュタイン 陽極線
87 ヘルツ 光電効果
95 レンチェン X線発見
96 ベクレル 放射能発見
97 トムソン 電子確認
キュリー ラジウム発見

20 エルステッド 磁気作用
20 アンペール則
20 ビオサバル則
26 オーム則
31 ファラデー 電磁誘導
32 ヘンリー 自己誘導
34 レンツ則
37 ファラデー 電力線
40 ジュール 熱作用
61 光の電磁波説 マックスウェル方程式
87 マイケルソン モーレー実験
88 ヘルツ 電磁波発見
93 ウィーン 変位則

00 ハーシェル 赤外線発見
01 リッター 紫外線発見
01 ヤング 干渉
08 マリウス 反射偏光
15 ブリュスタ角
15 フランホーファ線
16 フレネル 波動論
16 アラゴー 光の横波性
45 フィゾー 光速度測定
45 ファラデー 効果
60 キルヒホフ則 輻射
84 シュテファン ボルツマン 則

06 アルガン 複素平面
14 コーシー リーマン方程式
14 コーシー 積分定理
21 コーシー 収束理論
22 フーリエ級数
22 ポンスレー 射影幾何
24 ベッセル関数
27 ガウス 曲面論
29 ロバチェフスキー 非ユークリッド幾何
32 ガロア 群論
43 ローラン展開
45 カントール 集合論
54 リーマン幾何 リーマン積分
58 ケーリー マトリクス発見
71 クライン 計量による幾何統一
72 デデキント 切断
72 クライン エルランゲン目録
84 フレーゲ 数の定義
88-96 リー 群論
90 リッチ 絶対微分
99 ヒルベルト 幾何学基礎論 (公理主義)

12 ヘーゲル 論理学
48 マルクス エンゲルス 共産党宣言
59 ダーウィン「種の起源」
63 ミル 功利論
83 ニーチェ ツアラツーストラ
94 デューイ 社会と学校
96 ジェームス プラグマチズム

03 ルイジアナパーチェス
21 ナポレオン死
30 七月革命
48 二月革命
52 仏 クーデター
61 南北戦争
63 奴れい開放
69 米大陸横断 鉄道
70 コンミューン
71 ドイツ統一
98 米西戦争

20 ジージIV 30 ウイリアムIV 37 ヴィクトリア女王

ナポレオン時代 21 24 シャルルX 30 ルイフィリップス 48 第2共和制 52 ナポレオンIII 70 75 第3共和制

61 ウィルヘルムI 88 ウィルヘルムII

西部開拓期

00 伊能忠敬 測量し
40 アヘン戦争
53 ペリー
60 桜田門
68 明治維新
94 日清戦

徳川 68 明治

3 Newton力学の基本仮定（運動の法則）と万有引力

Newtonが運動の法則を見出したのは理論的考察［例えばいろいろな運動について加速度をしらべれば、下の表のように、作用している力に関係あると思われること］によるものか、実験によるものかわからないが、何れにしても少数の例で確かめたことであったし、それが一般的に成立つ基本的重要性をもつ事を見抜いて公理としたのであろう。そしてその正しさは先に述べたように、それから具体的な結論を導き、それらが実験観測と一致するか否かで判定される。従って、次の問題は運動の法則から、実験と比べ得る結論を導くことである

運動		速度	加速度	作用している力
等速度運動	$x = x_0 + vt$	v	0	0
落体	$x = gt^2/2$	gt	g	一定の重力
振子	$x = A\sin\omega t$	$A\omega\cos\omega t$	$-\omega^2 x$	xに比例する力

3-1. 力が場所（及び速度）の関数として知られているときは、運動の法則は運動を決定する微分方程式（＝運動方程式）となる。

例1) 力 $f = 0$ のとき：$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{dx}{dt} = C_1$, $x = C_1 t + C_2$ (3-1)

C_1, C_2 は任意定数。$t = 0$ での位置 $x(0)$、速さ $\dot{x}(0)$ を与えれば $C_1 = \dot{x}(0)$, $C_2 = x(0)$ となり解は $x(t) = \dot{x}(0)t + x(0)$ ときまる。

例2) $f = mg$ のとき：$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$. $\frac{dx}{dt} = gt + C_1$. $x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$ (3-2)

このときも C_1, C_2 は $x(0), \dot{x}(0)$ を与えればきまる。

例3) $f = -kx$ のとき：$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

$\frac{d^2x}{(\sqrt{\frac{k}{m}}dt)^2} = -x$, ∴ $\sqrt{\frac{k}{m}}t \equiv \theta$ とおけば $\frac{d^2x}{d\theta^2} = -x$.

微分して符号が変るだけの関数は $\cos\theta$, $\sin\theta$, 故に

$x(\theta) = C_2\cos\theta + C_1\sin\theta$, $x(t) = C_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

$x(0) = C_2$, $\dot{x}(0) = -\sqrt{\frac{k}{m}}C_1$, $x(t) = x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{k/m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ …(3-3)

例4) 速さに比例する抵抗をうける落体：$f = -kv$. $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$.

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$, $t \equiv -\frac{m}{k}x$, $v - \frac{m}{k}g \equiv y(x)$ とおけば

$\frac{dy}{dx} = y$. $\frac{dy}{y} = dx$, $\ln y = x + C$　$y = C_2 e^x$. これから

$$v = C_2 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{m}{k} g . \qquad v(0) = C_2 + \frac{m}{k} g . \qquad C_2 = v(0) - \frac{mg}{k} .$$

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) + v(0) e^{-\frac{kt}{m}} . \qquad (3\text{-}4)$$

Math. 1. 微分方程式：未知関数 $y(x)$ 及び その導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ が与えられた関係 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots) = 0$ を満足すべきことを要求するこの方程式を微分方程式といい、これを恒等的に満足する関数 $y(x)$ をその解という。含まれる導関数の最高階数により 1階 2階、… 微分方程式という。 解は一般に階数だけの任意定数（積分定数）を含む（一般解）。これらは $y(0), y'(0), y''(0) \cdots y^{(n-1)}(0)$ がある指定された値（初期値）をとるべしという要求（初期条件）を課すことによってきめることができる。

Math 2. 微分しても形の変らぬ関数 … Exponential, Log function

a) そのような関数が無限級数

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (M2\text{-}1)$$

で与えられるものと仮定し、微分しても形が変らぬように未定係数 a_i をきめる。

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \cdots \qquad (M2\text{-}2)$$

(M2-1), (M2-2) から $a_0 = a_1, \quad a_1 = 2a_2, \quad a_2 = 3a_3, \cdots$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{n!} a_0 . \qquad y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv a_0 e(x) . \qquad (M2\text{-}3)$$

b) $e(x)$ は指数関数と同じ性質を有する。先ず $e(0) = 1$ であり

次に
$$e(x) e(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m! n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{y^n}{n!} \frac{x^{N-n}}{(N-n)!}$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} x^{N-n} y^n = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(x+y)^N}{N!} = e(x+y) . \qquad (M2\text{-}4)$$

c) 従って $e(x) = e^x$ とおくことができる。

$$e = e(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (M2\text{-}5)$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$\therefore \quad 2 < e < 3 .$ 正しい値 $\boxed{e = 2.71828 \cdots}$ (M2-6)

d) $x = e^y$ を $y = \log_e x$ or $= \ln x$ とかく.

$x = e^y$ の両辺 x で微分： $1 = e^y \frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ (M2-7)

e) $\int_0^x \frac{dx'}{(1+x')} = \ln(1+x) = \int_0^x dx'\,(1-x'+x'^2-\cdots) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots$

$\ln(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$ …(M2-8)

は有用な公式である。但し $|x|<1$

f) (M2-8)で x を x/n とおけば

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \approx \frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{2n}+\frac{x^2}{3(2n)^2}-\cdots\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x\left(1-\frac{x}{2n}+\frac{x^2}{12n^2}-\cdots\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{x\left[1-\frac{x}{2n}+\frac{x^2}{12n^2}-\cdots\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \cdots\text{(M2-9)}$$

以上の e^x の定義は，高校で学んだものと同じ！

g) $f(x) = \cos x + i\sin x \to f' = -\sin x + i\cos x = if$

$\frac{df(x)}{d(ix)} = f(x)$. $f(x) \equiv F(z)$ $z \equiv ix$ とおけば

$\frac{dF(z)}{dz} = F(z)$, また $F(0) = 1$

$\therefore F(z) = e^z$, $\to f(x) = \underbrace{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ (Euler)

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2i}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right] \\ \cos x &= \frac{1}{2}\left[e^{ix} + e^{-ix}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{(M2-10)}$$

h) $\cosh x \equiv \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\sinh x \equiv \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$

とおけば $\sin(ix) = i\,\mathrm{sh}\,x$, $\cos(ix) = \cosh x$ (M2-11)

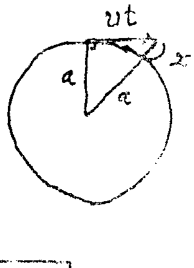
これから $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. $\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$, $\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$

など3角関数の関係が導かれる．これらを双曲線関数という

（注意） 以上では級数の収束，項別微分積分の可能性などの問題を度外視して来た．［数学の講義の進行した後，各自検討されたい］
指数関数を級数で定義する厳密な理論については
Whittaker & Watson : Modern Analysis p579－p590 参照

3-2. 加速度が既知の運動では作用している力の法則を知ることができる

例) 円運動の求心力；



$$x(t) = \sqrt{a^2+(vt)^2} - a$$

$$= a\left[1+\frac{(vt)^2}{a^2}\right]^{1/2} - a$$

$$= a\left[1+\frac{(vt)^2}{2a^2}+\cdots\right] - a \quad = \frac{v^2t^2}{2a}+\cdots$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v^2}{a}, \quad (3\text{-}5)} \qquad \boxed{\text{求心力}：f = \frac{mv^2}{a} \quad (3\text{-}6)}$$

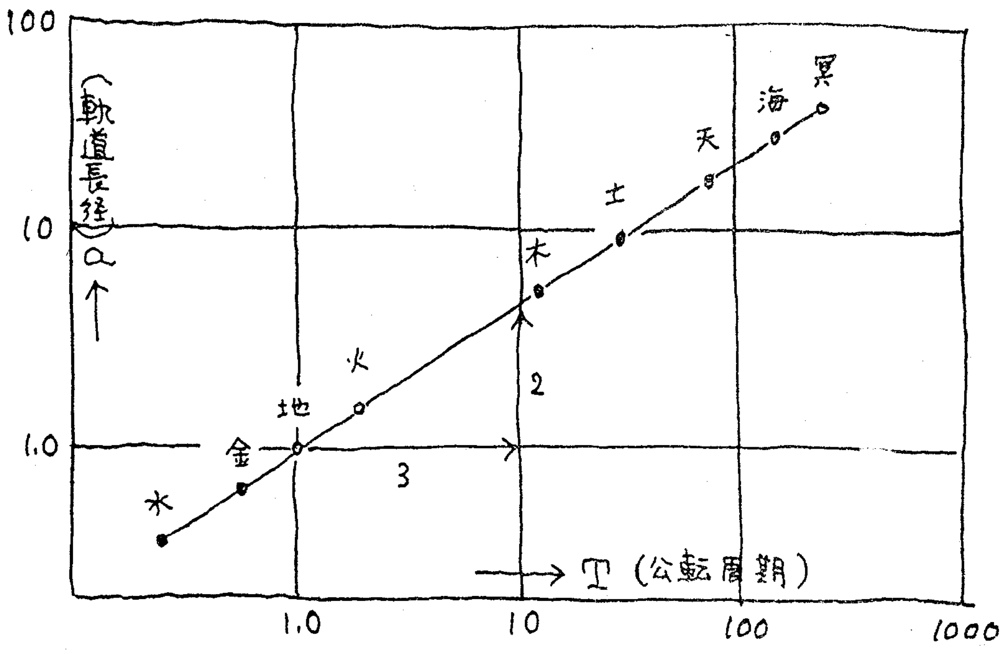
3-3 Keplerの法則と万有引力

既に高校でよく学んだことである

Keplerの第3法則については理解を深めるため検証を行う。理科年表によれば惑星の公転周期(T)と軌道長半径(a)は次の表の通りである.

惑星	公転周期(年)	軌道長径(A.U.)	惑星	公転周期	軌道長半径
水星	0.2409	0.387099	土星	29.457	9.53876
金星	0.6152	0.723332	天王星	84.075	19.19139
地球	1.0000	1.000000	海王星	164.821	30.0610
火星	1.8809	1.523691	冥王星	248.541	39.52
木星	11.862	5.538762			

これをlog・log方眼紙にプロットしたものが次の図である。



傾斜が$\frac{2}{3}$の直
線にのることに
注意せよ。
log-log Sectio
Paperというのは
たてよこにa, T
ではなくてlog a,
log Tをとってプ
ロットしたことに
なる方眼紙であ

従って傾き$\frac{2}{3}$の直線は　$\log a = \frac{2}{3}\log T + C$　or　$3\log a - 2\log T = 2$

$\log \frac{a^3}{T^2} = 2C \equiv \log k =$ 一定　　$\boxed{a^3/T^2 = k \qquad (3\text{-}7)}$

であることを表わしている。これがKeplerの第3法則である。

ラー
の法則
から
有引力
を導びく、

$\boxed{\text{惑星の求心加速度}\ \alpha = \frac{v^2}{a}}$，（惑星軌道は円に近い楕円．円軌道とみる）

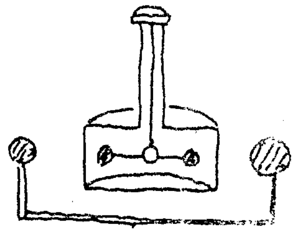
$v = \frac{2\pi a}{T}$　　∴　$\boxed{\text{求心力} = \frac{m}{a}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m a}{T^2}} \left(\begin{array}{l} m:\text{惑星質量} \\ T:\text{周期} \end{array}\right)$

$\frac{1}{T^2} = \frac{k}{a^3}$ を代入　　$\boxed{f(\text{求心力}) = \frac{4\pi^2 k m}{a^2} \equiv G\frac{Mm}{a^2} \qquad (3\text{-}8)}$

最後の変形で，惑星が太陽に引かれる力が惑星の質量に比例するなら，同じ力を太陽が惑星に引かれる力と考えればこの力は太陽質量Mにも比例すべきことを用いた，

万有引力定数Gはキャベンディッシュが1998年ねじればかり（図）を用いはじめて決定：現在知られているその値は

$$\boxed{\begin{aligned} G &= 6.6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}\ (\mathrm{MKS}) \\ &= 6.6720 \times 10^{-8}\ \mathrm{dyn \cdot cm^2 \cdot g^{-2}}\ (\mathrm{CGS}) \end{aligned}}$$


(3−9)

3-4. 運動の法則，万有引力の法則からKeplerの3法則が導かれること

（問）ある時刻 t=0 で惑星の速度を $\vec{v}_0$ とすれば，以後惑星はベクトル $\vec{v}_0$ と t=0 で太陽から惑星に向うベクトル $\vec{r}_0$ がきめる平面内を運動し，この平面からはずれることがない，何故か？

この平面内で太陽を原点とする直交座標 x y を考えれば惑星の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= \frac{-GMm}{r^2}\cos\theta = \frac{-GMm\,x}{[x^2+y^2]^{3/2}} \\ m\ddot{y}(t) &= \frac{-GMm}{r^2}\sin\theta = \frac{-GMm\,y}{[x^2+y^2]^{3/2}} \end{aligned}\right\} (3\text{-}10) \quad \text{但し}\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

極座標を用いると解きやすい

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta} \end{aligned}\right\} (3\text{-}11)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} - \dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} - r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}12)$$

これを運動方程式(3-10)に代入

$$\left.\begin{aligned} &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2}\right)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta = 0 \\ &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2}\right)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}13)$$

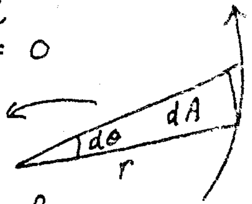
これから <u>極座標での運動方程式</u>

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \cdots (3\text{-}14), \qquad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \cdots (3\text{-}15)}$$

が得られる。 (3-15)から Keplerの面積速度一定則が出る:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \overset{(3\text{-}15)\text{により}}{\overset{\downarrow}{=}} 0$$

$$\therefore \boxed{\ell \equiv r^2\dot{\theta} = 一定 \qquad (3\text{-}16)} \quad dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\ell dt$$



$$\underline{\text{Kepler II}} \leftarrow 面積速度一定 \qquad \leftarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2} = \text{const}$$

軌道の方程式 $r = r(\theta)$ を求めること. [(3-14)から求まる]

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{r^2} \qquad \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\ell\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3\text{-}17)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = -\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3\text{-}18)$$

(3-18)を用い(3-14)は

$$-\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{\ell^2}\right) = 0 \quad (3\text{-}19)$$

$\frac{1}{r} - \frac{GM}{\ell^2} \equiv u$ とおけば

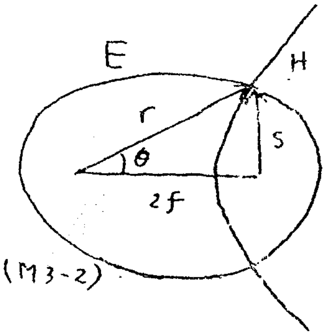
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \qquad (3\text{-}20)$$

(3-20)は3角関数の微分方程式, $\therefore u = A\cos\theta + B\sin\theta =$ $= \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta - \theta_0) \equiv C\cos(\theta - \theta_0)$, これから軌道の方程式

$$\therefore \boxed{\frac{1}{r} = \frac{GM}{\ell^2} + C\cos(\theta - \theta_0) \equiv \frac{GM}{\ell^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right) \qquad (3\text{-}21)}$$

が得られる。[これが円錐曲線の方程式であることはMath3を参照.]

Math 3: 2次曲線の極方程式



$$S^2 = r^2 + (2f)^2 - 2(2f)r\cos\theta \quad (\text{M3-1})$$

$r + S = 2a \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S>0 \text{ なら楕円 } E \\ S \to -S \text{ とすれば双曲線 } H \end{array} \right.$

何れにしても

$$S^2 = (2a-r)^2 = r^2 + (2a)^2 - 2(2a)r, \quad (\text{M3-2})$$

$$(2f)^2 - 2(2f)r\cos\theta = (2a)^2 - 2(2a)r$$

$$r(a - f\cos\theta) = a^2 - f^2, \quad \frac{a^2-f^2}{ra} = 1 - \frac{f}{a}\cos\theta = 1 - e\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 - e\cos\theta), \quad e = \frac{f}{a}\ (\text{離心率 Eccentricity})} \quad (\text{M3-3})$$

(3-21)からわかるように惑星軌道の e は積分定数 $C = \sqrt{A^2+B^2}$, 即ち初期

できまる。 $e>1$ なら双曲線, $e<1$ な楕円 $e=1$ なら放物線.

公転周期； $T = \dfrac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}} = \dfrac{\pi ab}{\ell/2}$ (3-22)

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^2 b^2}{\ell^2} = \frac{4\pi^2 a^3 b^2}{a\ell^2}$$

, (M3-3)と(3-21)を比べれば

わかるように $\dfrac{a}{b^2} = \dfrac{GM}{\ell^2}$, これを上式に代入

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2}\frac{\ell^2}{GM}a^3 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3, \quad \therefore \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \quad (3-23)$$

Mは太陽質量, 従って右辺はどの惑星についても一定 → Kepler III

Math 4. 複素数の利用

平面上の運動(2次元運動)では複素数を用いると取扱いが簡単になることがある；

例1) 運動方程式(3-10)を極座標に移す計算. $z = x + iy$ とおけば

$$\ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y} = -\frac{GM}{r^2}(x+iy) = -\frac{GM}{r^2}z \quad (\text{M4-1})$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \quad (\text{M4-2})$$

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + i\dot{\theta}re^{i\theta} = (\dot{r} + ir\dot{\theta})e^{i\theta} \quad (\text{M4-3})$$

$$\ddot{z} = [(\ddot{r} + i\dot{r}\dot{\theta} + ir\ddot{\theta}) + i\dot{\theta}(\dot{r} + ir\dot{\theta})]e^{i\theta} \quad (\text{M4-4})$$

(M4-1)に代入： $\ddot{r} + 2i\dot{\theta}\dot{r} + i\ddot{\theta}r - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{-GM}{r^2}$

or $\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \dfrac{GM}{r^2}\right) + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \dfrac{GM}{r^2} = 0 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{array}\right\} (\text{M4-5})$

この方が以前の計算より簡単！

例2）振子は2次元問題でないが，2次元になほして複素数を利用すると便利である。

$\ddot{x}+\omega^2x=0$ をとくため $\dot{x}\equiv p$ $\omega x\equiv q$ とおけば

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}&=-\omega q\\ \dot{q}&=\ \ \omega p\end{aligned}\right\}$$ であることがわかる。 $Z\equiv p+iq$ とおけば

$$\dot{Z}=(\dot{p}+i\dot{q})=-\omega q+i\omega p=i\omega(p+iq)=i\omega Z,\quad(M4\text{-}6)$$

$$\frac{dZ}{dt}=i\omega Z\ \rightarrow\ \frac{dZ}{Z}=i\omega dt\qquad \ln Z=i\omega t+c\qquad Z=Ce^{i\omega t},\quad(M4\text{-}7)$$

Cは複素数 $|C|e^{i\phi}$ でよいから $Z=|C|e^{i(\omega t+\phi)}$ (M4-8)

$$p+iq=|C|\left(\cos(\omega t+\phi)+i\sin(\omega t+\phi)\right)$$

$$\therefore\ p=\dot{x}=|C|\cos(\omega t+\phi)\qquad x=\frac{q}{\omega}=\frac{|C|}{\omega}\sin(\omega t+\phi)\ (M4\text{-}9)$$

（注意）(M4-7) で dZ/Z を積分したが，複素数の積分とはなにか未だ知らない。実数の場合と同じRuleに従うものとして積分を求めたが複素数の積分については「複素数関数論」の講義，書物をみよ．

演習問題 1

(1) ガリレイは長さ l の単振子の周期Tを図1のような斜面をころがる球の周期として近似的に求めた。正しい式と比較してみよ。図2のような斜面でおきかえたら，どのくらい近似がよくなるか。（伏見訳：マッハ力学 p150）

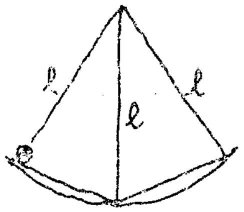


図 1

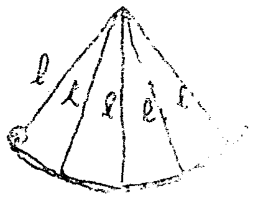


図 2

(2) $$\boxed{\log_{10}e=0.43429448\equiv M.\quad \frac{1}{M}=2.30258509}$$

を用いて $\log_{10}x$ を $\ln x$ に，$\ln x$ を $\log x$ に換算する公式を作れ

$\log 2=0.30103$ $\log 3=0.47712$ である．$\ln 2,\ \ln 3$ を求めよ。

(3) 地球からの3角測量，又はレーダー波の反射によれば月までの距離 $a_月$ 及び公転周期 $T_月$ は

$$\boxed{\begin{aligned}a_月&=60,2682\times(\text{地球半径})=3,844\times10^8\,\mathrm{Km}\\ T_月&=27,212\ 日\end{aligned}}$$

である。月の求心加速度 $v_月^2/a_月$ を求め，それに $\left(\frac{a_月}{r_地}\right)^2$ をかけたものと地表の重力加速度 $g=9.8\,\mathrm{m/s}$ と比べよ。但し $r_地$ は地球半径で

$$\boxed{r_地=6378\,\mathrm{Km}}$$

(4) 火星が地球に最も近づいたとき，地球からの3角測量で，火星までの距離 $0,7835 \times 10^8$ Km を得た。火星の公転周期 $T_{火} = 1.881$ 年として Kepler の第3法則を用い，地球太陽間距離（=天文単位A.U.という）を求めよ。 現在：$\boxed{1天文単位 = 1.49600 \times 10^8 \text{ Km}}$

(5) 金星の最大離角（地球からみた太陽金星間角の最大値）$\theta = 46.3301°$，$\sin\theta = 0.7233$ であった。太陽金星間距離（金星軌道半径）及び金星の公転周期を求めよ．

(6) Newton 力学から導かれた Kepler の法則（3-23）により，既に知っている地球，月の軌道半径，公転周期から太陽と地球の質量の比を求めよ。

(7) 地表での重力加速度 g は $g = G\frac{M_{地}}{r_{地}^2}$ で与えられるものとして，$g = 9.8$ m/s　G，$r_{地}$ は既に知っている値として，地球の質量 $M_{地}$ 及び平均密度を求めよ。

(8) 次の表は1950年全国女子年令別人口（単位万人）分布である。これについて人間の死も放射性元素の崩壊の法則 $N(t) = N(0)\,e^{-kt}$ と同じ法則に従うといってよいかどうかしらべよ．［$\ln N(t)$ と t のグラフ，又は Semi-log 方眼にプロットしてみよ］（朝日年鑑による）

区間	人口	区間	人口	区間	人口	区間	人口
0～4才	549	20～24	389	40～44	228	60～64	119
5～9	470	25～29	336	45～49	199	65～69	97
10～14	430	30～34	284	50～54	167	70～74	74
15～19	420	35～39	267	55～59	137	75～80	42
						80～	25

(9) 次の表は木星の13個の衛星について公転周期（単位日）及び軌道長半径（木星の赤道半径71400Km単位）の観測結果である。Log-Log 方眼にプロットすることにより Kepler III をたしかめよ．（理科年表1977による）

衛星	周期	長半径	衛星	周期	長半径
Io	1.7691	5.91	Elara	259.65	164.3
Europa	3.5512	9.40	Pasiphae	738.9	329.3
Ganimede	7.1545	14.99	Sinope	758	330.4
Callisto	16.6890	26.36	Lysithea	253	161.4
Amalthea	0.4982	2.53	Carme	692	316.0
Himalia	250.57	160.7	Ananke	631	297.0
			Leda	239	155.0

4. 運動方程式の解法に役立つ保存則：

4-1 実例：

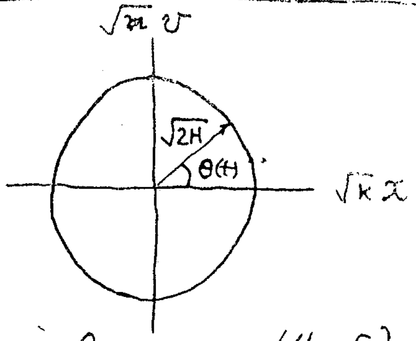
1) 調和振動子． $m\ddot{x} + \kappa x = 0$ (4-1)

両辺に $\dot{x} = v$ をかけ $m v \dot{v} + \kappa \dot{x} x = 0$ (4-2)

$\frac{dv^2}{dt} = 2v\dot{v}$, $\frac{dx^2}{dt} = 2x\dot{x}$ であるから (4-2) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2 + \kappa x^2}{2}\right) = 0 \xrightarrow{\text{積分I}} \boxed{H = \frac{mv^2 + \kappa x^2}{2} = \text{const.}} \quad (4\text{-}3)$$

(4-3) は $\sqrt{m}\,v$, $\sqrt{\kappa}\,x$ を座標とする点は半径 $\sqrt{2H}$ の円周上にあることを示す．故に



$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\kappa}\; x(t) &= \sqrt{2H}\cos\theta(t) \\ \sqrt{m}\; v(t) &= \sqrt{2H}\sin\theta(t) \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}4)$$

とかける。(4-4) 第1式微分し，第2式と比べ

$$\dot{x} = v = \underbrace{\sqrt{\frac{2H}{\kappa}}\,(-\sin\theta)\,\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2H}{m}}}\sin\theta \quad (4\text{-}5)$$

$$\theta = -\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t - t_0) \xleftarrow{\quad}_{\text{積分II}} \underline{\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{\kappa}{m}}} \quad (4\text{-}6)$$

$\downarrow$

$$(4\text{-}4) \longrightarrow \left.\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2H}{\kappa}}\cos\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t - t_0) \\ \dot{x}(t) &= -\sqrt{\frac{2H}{m}}\sin\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t - t_0) \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}7)$$

[注目] 運動方程式は2階微分方程式だから2回積分しなければならぬ [積分I，積分IIの2回やっている]．積分Iの結果 (4-3) は<u>エネルギー保存則</u>に他ならぬ。<u>エネルギー保存則を書き下せば1回積分が省かれることに注意せよ!</u> 保存則は運動方程式の積分なのである。

2) Kepler 問題：

$$\left.\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\frac{GMm}{r^3}x \quad に \quad v_x = \dot{x} \\ m\dot{v}_y &= -\frac{GMm}{r^3}y \quad に \quad v_y = \dot{y} \end{aligned}\right\} \text{をかけ辺々相加えれば} \quad (4\text{-}8)$$

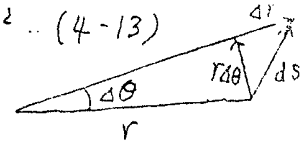
$$m(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y) + \frac{GMm}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \quad (4\text{-}9)$$

$$\text{第一項} = \frac{d}{dt}\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} = \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} \quad (4\text{-}10)$$

$$\text{第二項} = \frac{GMm}{r^3}\frac{dr^2}{2dt} = \frac{GMm}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{GMm}{r} \quad (4\text{-}11)$$

$$(4\text{-}10) \rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}\right] = 0 \xrightarrow{\text{積分I}} \boxed{H = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const}} \quad (4\text{-}12)$$

運動エネルギーを極座標に移すのは簡単： $\Delta S^2 = (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\theta)^2 \cdots (4\text{-}13)$



$$v^2 = \left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (4\text{-}14)$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \cdots (4\text{-}15)$$

面積速度一定 $l = r^2\theta = $ 一定 $\quad \dot{\theta} = \frac{l}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -l\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$

を用い $\quad H = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2GM}{r}\right) = \frac{m}{2}\left[l^2\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2GM}{r}\right] \quad (4\text{-}16)$

$$\frac{2H}{ml^2} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{l^2 r} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{l^2}\right)^2 - \frac{(GM)^2}{l^4} \cdots (4\text{-}17)$$

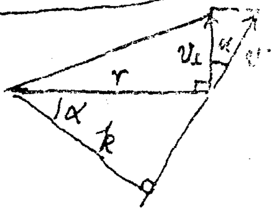
$$\frac{1}{r} - \frac{GM}{l^2} \equiv u, \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2H}{ml^2} + \frac{(GM)^2}{l^4} = \left(\frac{GM}{l^2}\right)^2\left(1 + \frac{2Hl^2}{(GM)^2 m}\right)$$

$$u = \left(\frac{GM}{l^2}\right)\sqrt{1 + \frac{2Hl^2}{(GM)^2 m}}\cos(\theta - \theta_0), \quad \frac{du}{d\theta} = -\left(\frac{GM}{l^2}\right)\sqrt{1 + \frac{2Hl^2}{(GM)^2 m}}\sin(\theta - \theta_0) \quad (4\text{-}18)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hl^2}{(GM)^2 m}}\cos(\theta - \theta_0)\right) = \frac{GM}{l^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \quad (4\text{-}19)$$

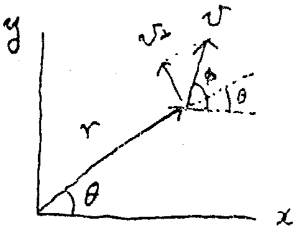
$$e = \sqrt{1 + \frac{2Hl^2}{(GM)^2 m}} \quad \left.\begin{array}{lll} > 1 & H > 0 & \text{双曲線} \\ = 1 & H = 0 & \text{放物線} \\ < 1 & H < 0 & \text{楕円}^{(1)} \end{array}\right\} \quad (4\text{-}20)$$

4-2 面積速度一定と角運動量保存：



$$l = r^2\dot{\theta} = r v_\perp = r v\cos\alpha = k v \quad (k = r\cos\theta)$$

$L = ml = k(mv) =$ 運動量のモーメント $\equiv$ 角運動量 Angular Momentum



$$v_\perp = v\sin(\phi - \theta) = v(\sin\phi\cos\theta \pm \cos\phi\sin\theta)$$

$$l = r v_\perp = v_y x - v_x y \quad \cdots\cdots (4\text{-}21)$$

$$L = x(mv_y) - y(mv_x) = (\vec{r} \times m\vec{v})_z \cdots (4\text{-}22)$$

$$\frac{dL}{dt} = m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = x f_y - y f_x \quad (4\text{-}23)$$

$\boxed{\frac{dL}{dt} = \text{力のモーメント} \quad (4\text{-}24)}$

$\boxed{\text{中心に向う力のモーメント} = 0}$

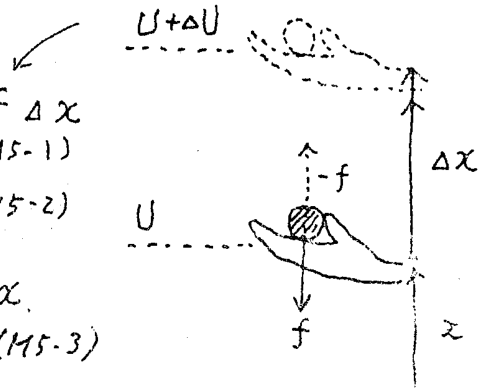
≡（中心力），中心力の場で

$\frac{dL}{dt} = 0 \xrightarrow[\text{積分}]{} \boxed{L = \text{一定} \quad \text{（角運動量保存）} \quad (4\text{-}24)}$

---

(1) エネルギー H が負ということに深い意味はない。位置エネルギーの起点をどこにとるかということだけ考えてみても，エネルギーは定数だけ不定のことがわかる。

Math 5. Potential, 偏微分, 全微分



(1) 位置エネルギーの増分： $\Delta U = -f\Delta x$ ……(M5-1)

$$\frac{dU(x)}{dx} = -f(x) \quad \cdots\cdots (M5\text{-}2)$$

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad \cdots (M5\text{-}3)$$

(2) 仕事

$$-dU = \vec{f}\cdot d\vec{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad \cdots (M5\text{-}4).$$

(3) $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ と (x, y, z) に於ける位置エネルギーの差：

$$\begin{aligned}\Delta U &= U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x\,y\,z) \\ &= \left.\begin{aligned}&[U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z)] \\ &+[U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z)] \\ &+[U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z)]\end{aligned}\right\} (M5\text{-}5)\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \to \frac{\partial U(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\partial x} \quad (\text{偏微分}) \cdots (M5\text{-}6)}$$

$$\Delta U \fallingdotseq \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z, (\text{全微分}) \quad \cdots (M5\text{-}7)$$

$$= -f_x\Delta x - \Delta f_y\Delta y - f_z\Delta z \quad \longleftarrow (M5\text{-}8)$$

$$\therefore \boxed{-\frac{\partial U}{\partial x} = f_x, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = f_y, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = f_z \qquad (M5\text{-}8)}$$

4-3. まとめと展望：

以上の実例からわかるように、

(1) 保存則は運動方程式をある方法で1回積分した結果得られるものである。
(従って、エネルギー積分、(角)運動量積分などといわれることもある[中間積分])

(2) 従って、多くの保存則が得られれば、それだけ運動方程式を積分する回数が減るので、それだけ解を得るのが容易になる。(複雑な問題では助かる！)

例えば1次元運動で $H = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$ というエネルギー保存則が成立つことがわかれば、これから速度 $\dot{x} \equiv v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{H - V(x)}$ が得られ、dx だけ進むに要する時間の経過 $dt = dx/v(x)$ が求まる。即ち、

$$\boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{v(x')} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{H - V(x')}}} \qquad (4-26)$$

となり. あと1回この積分を行うだけで. $t - t_0$ が x. x_0 の関数, 逆に x が $t - t_0$ と x_0 の関数 $x(t) = F(t - t_0, x_0)$ として求まり. 解が得られたことになる。

例) $H = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}x^2$ のとき; $v = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{H - \frac{k}{2}x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2H}{k} - x^2}$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2H}{k} - x'^2}} \qquad (4-27)$$

x_0 を振巾 $\sqrt{\frac{2H}{k}}$ にえらべば

$x' = x_0 \cos\theta$ とおき

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{0}^{\cos^{-1}\frac{x}{x_0}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin\theta} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cos^{-1}\frac{x}{x_0}$$

$$\therefore\ -\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \cos^{-1}\frac{x}{x_0}, \qquad x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0), \quad (4-28)$$

これと同じことを次のようにやることもできる。

$$\frac{\partial}{\partial H}\sqrt{H - V(x)} = \frac{1}{2\sqrt{H - V(x)}} \qquad (4-29)$$

であることを用いると, (4-26)は

$$t - t_0 = \frac{\partial}{\partial H} \int_{x_0}^{x} \sqrt{2m(H - V(x'))}\, dx' \equiv \frac{\partial S}{\partial H} \qquad (4-30)$$

とかけるから. (4-26)の積分の代りに

$$\boxed{S = \int_{x_0}^{x} \sqrt{2m(H - V(x'))}\, dx' = \int_{x_0}^{x} m\, v(x')\, dx'} \qquad (4-31)$$

を計算してもよい。(Sを作用(積分)という) Sを x で微分すれば

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2m(H - V(x))} \qquad (4-32)$$

両辺を2乗すれば

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x)} \qquad (4-33)$$

が得られる。これはエネルギー保存則で運動量 mv を $\frac{\partial S}{\partial x}$ でおきかえて得られるSの微分方程式で, Hamilton−Jacobiの方程式という。これをといてSを求め, $t - t_0 = \partial S/\partial H$ とおけば解が得られる。

例) 上例でH-J方程式は $H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2$, $\frac{\partial S}{\partial x}$ を求めれば

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{mk}\sqrt{\frac{2H}{k} - x^2}, \qquad S = \sqrt{mk}\int_{x_0}^{x} dx' \sqrt{\frac{2H}{k} - x'^2}.$$

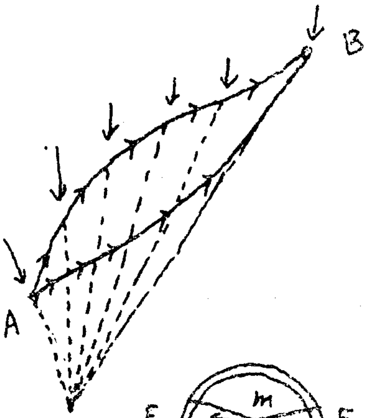
$$\frac{\partial S}{\partial H} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2H}{k} - x'^2}} = t - t_0$$

これは(4-27)と同じであるから

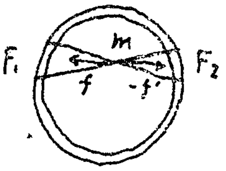
H-J eq. をといて $t - t_0 = \frac{\partial S}{\partial H}$ とおけば正しい解が得られることが解る.

この方法は1次元以外の場合にも拡張されるが, それはあとでやる.

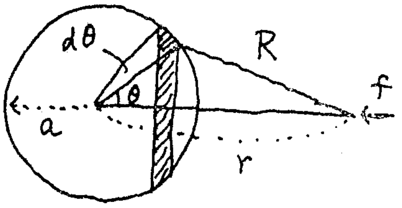
演習問題2



(1) 位置エネルギーが意味をもつためには同じ質点をAからBに運ぶためにする仕事が経路に无関係でなければならない。何故か？ また図のような中心力が作用する場合，仕事が経路に无関係(保存力)であることを示せ。



(2) 質量が一様な密度σで分布する球殻内の任意の一点に於て質量mに作用する重力は0であることを示せ。[図の微小領域 F_1, F_2 からの重力 f, $-f'$ は打ち消すことを示せばよい]

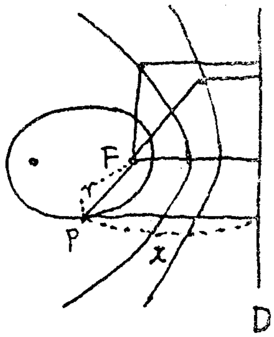


(3) 球外の点(中心から距離r)の点に於ける重力は

$$f = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \text{但し}$$

$$U(r) = -2\pi a^2\sigma \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{R}. \quad (4\text{-}34)$$

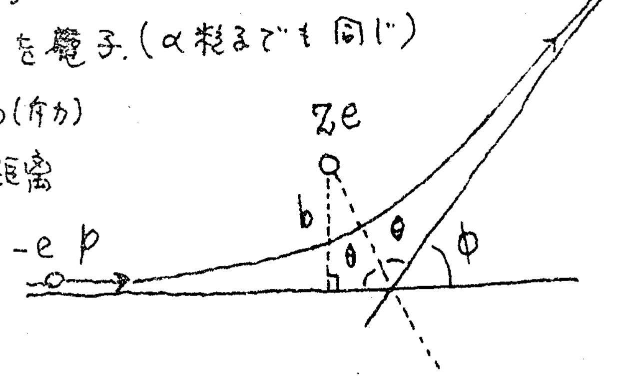
で与えらることを示せ. aは球殻の半径, $R=\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}$.
$dR = \frac{ra}{R}\sin\theta\, d\theta$ であることを用い(4-34)をRの積分になおして計
し. その結果から「一様な球殻外に於ける重力は全質量が中心にあつまったときの重力に等しい」ことをたしかめよ。



(4) 定点F. 定直線Dからの距離の比 $\frac{r}{x} = e$ が1定の点の軌跡は $e>1$, $=1$, <1 に従ってそれぞれ双曲線. 放物線. 楕円であることを示せ

(5) (4-19)で $H>0$ の場合(双曲線). これから漸近線間の角θが
$$\cos\theta = \frac{1}{e} = \left[1+\frac{2mH\ell^2}{G^2M^2m^2}\right]^{-1/2}$$
で与えられることを示せ.

(6) 太陽を電荷Zeの原子核, 惑星を電子(α粒子でも同じ)でおきかえても2乗反比例引力(斥力)には変りがない。原子核から距離bの軌道を運動量 $p=mv$ で進入して来た粒子の軌道



の漸近線間の角2θは（重力の場合の適当な読みかえで）

$$\cos\theta = \left[1+\left(\frac{p^2 b}{Ze^2 m}\right)^2\right]^{-1/2} \quad \text{or} \quad \tan\theta = \frac{p^2 b}{Ze^2 m} \qquad (4-35)$$

となることを示せ。 $\phi = \pi - 2\theta$ を粒子の散乱角という。

$$\cot\frac{\phi}{2} = \frac{p^2 b}{Ze^2 m} \qquad (4-36)$$

であることを示せ。この式は入射粒子の運動量p. 入射軌道と核の距離 b（これを<u>衝突係数 Impact parameter</u>）が与えられば散乱角ϕ即ち粒子のとび去る方向がきまることを示す。

(7) 一様な密度で入射する運動量pの粒子群が核から. $b+db$ とbの間の距離にある軌道にある確率は面積 $2\pi b\,db$ に比例する。これは

$$d\sigma \equiv 2\pi b\,db = \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2 \sin^4\frac{\phi}{2}}\, 2\pi\, d(\cos\phi) \qquad (4-37)$$

となり, 粒子が $\phi+d\phi$ と ϕ の間の散乱角で散乱される確率に比例する。 $d\sigma$ を<u>ラザフォード散乱の微分断面積</u>という。(4-37)を導け。

(8) 落体のエネルギー保存則は $H = \frac{mv^2}{2} + mgx$ で与えられる。$v=0$ の点をx_0, 即ち $H = mgx_0$, $x_0 = \frac{H}{mg}$ として.

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{v(x')} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x_0 - x'}}$$

によって運動 $x=x(t)$ を決定せよ。またハミルトンヤコビ方程式から出発して運動を決定せよ。［落体の場合は運動方程式を直接積分するのが最も簡単で, こんなまわり道をするバカはいない。保存則を利用する積分, H.J. による積分ではどんなことをしているのか理解するためにやってみよ］

(9) 振子について (4-31) の積分を1振動について行ったもの J;

$$J = 2\int_{-x_0}^{+x_0} dx' \sqrt{2m\left(H - \frac{K}{2}x'^2\right)}$$

とおけば $\frac{\partial J}{\partial H} = T = \frac{1}{\nu}$ （T：周期, ν：振動数）また $J = n\hbar$ とおけば $H = n\hbar\nu$ となることを示せ。

5. どんな座標を使っても運動方程式を直ちに書き下すことができぬか？

Newtonの運動方程式は直交座標で表わされているので、Kepler問題でこれを極座標へ移すのに繁雑な計算が必要であった。こんな面倒なしにどんな座標を使っても、いきなり運動方程式が書き下せたら便利だ。

5-1 勝手な座標へ移ったら運動方程式はどんな形になるか？

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\equiv x_1(t) = x_1(q_1(t)\ q_2(t).\ q_3(t)) \\ y(t) &\equiv x_2(t) = x_2(q_1(t).\ q_2(t),\ q_3(t)) \\ z(t) &\equiv x_3(t) = x_3(q_1(t).\ q_2(t).\ q_3(t)) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(x_1\ x_2\ x_3) \\ q_2(t) &= q_2(x_1\ x_2\ x_3) \\ q_3(t) &= q_3(x_1\ x_2\ x_3) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}1)$$

は $x.y.z$（直交座標）から任意の座標 q_1, q_2, q_3 へ移る変換とする。

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\Delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\Delta q_3 = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\Delta q_\alpha \qquad (5\text{-}2)$$

であるから $\dot{x}_i = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$ (5-3)

運動エネルギー T はこの場合も簡単に新しい座標 q_i で表わせる：

$$T = \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i\dot{x}_i = \frac{m}{2}\sum_i\sum_{\alpha.\beta}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \qquad (5\text{-}4)$$

$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}$ は q_1, q_2, q_3 の関数で $\dot{q}$ を含まぬから、 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} = \sum_{i\beta} m\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta$ (5-5)

Newton方程式； $m\frac{d^2x_i}{dt^2} - f_i = m\frac{d^2x_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$, (5-6)

に $\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}$ をかけ i について加えると； $\sum_i\left(m\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}\right) = 0$ (5-7)

$$(5\text{-}7)\text{の第2項} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma} = \frac{\partial V}{\partial q_\gamma} \qquad (5\text{-}8)$$

$$(5\text{-}7)\text{の第1項} = m\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}\frac{dx_i}{dt}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\frac{dx_i}{dt}\right)\frac{dx_i}{dt}\right]$$

$$= m\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}q_\beta\right) - m\sum_i\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\frac{\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} \qquad (5\text{-}9)$$

この式の第一項 ＝ (5-5)を微分したもの. 第二項 $= \frac{\partial T}{\partial q_\gamma}$, ∴

$$(5\text{-}7)\text{の第一項} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} - \frac{\partial T}{\partial q_\gamma} \qquad (5\text{-}10)$$

(5-8). (5-10) を (5-7) に代入：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} - \frac{\partial}{\partial q_\gamma}(T-V) = \frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_\gamma} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_\gamma} = 0 \qquad (5\text{-}11)$$

従って. $L = T - V$ (5-12)

を新しい座標で表わせば、$q.\dot{q}$ で微分するだけで新しい座標で表わされた

運動方程式： $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0} \qquad (5-11)$$

が得られる。(5~12)をLagrange関数(Lagrangian), (5-11)をLagrange方程式という。q_αは全く任意[1]の座標であるから, 運動方程式はどんな座標でも(5-11)の形で表わされる。エネルギーを別の座標で表わすのは運動方程式自身を変換するよりも簡単なので, このLagrange方程式は実用上非常に便利である。

5-2 実例:

(1) Kepler問題: $V=-\frac{GMm}{r}$, Tは(4-14)のようにして容易に $T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$

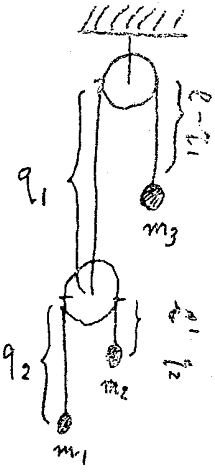
$$\therefore\ L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{GMm}{r} \qquad (5-12)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \rightarrow mr^2\dot{\theta}\equiv ml=\text{一定} \qquad (5-13)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+\frac{GMm}{r}=0 \qquad (5-14)$$

このように(3-14)(3-16)が直ちに得られる。この例でLはθを含んでいない。従って$\partial L/\partial\theta=0$. このことから$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=$一定となった。Lにある座標が陽に含まれていないとき, このような座標を循環座標という。qが循環座標なら$\partial L/\partial \dot{q}=\text{const}$という保存則が成り立つ。

(2) 初等的な例: $q_1, q_2, \cdots$などは必ずしも数学でなじみ深いものでなくても, それらの値を与えると~~全体~~物体の配置が決まるようなものであれば何でもよい。右の図の場合, q_1, q_2をきめれば配置がきまるので, これを"座標"に選ぶと



$$V=-m_1g(q_1+q_2)-m_2g(q_1+l'-q_2)-m_3g(l-q_1)$$
$$=-m_1g(q_1+q_2)-m_2g(q_1-q_2)+m_3gq_1+\text{const}$$

$$T=\frac{m_1}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+\frac{m_2}{2}(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+\frac{m_3}{2}\dot{q}_1^2$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_1}=m_1g+m_2g-m_3g,\quad -\frac{\partial V}{\partial q_2}=m_1g-m_2g$$

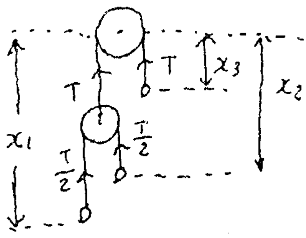
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=m_1(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)+\overbrace{m_2(\ddot{q}_1-\ddot{q}_2)}^{+m_3\ddot{q}_1}-(m_1+m_2-m_3)g=0, \qquad (5-15)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial L}{\partial q_2}=m_1(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)-m_2(\ddot{q}_1-\ddot{q}_2)-(m_1-m_2)g=0, \qquad (5-16)$$

となり, これからq_1, q_2の運動方程式が得られる。エネルギーT, Vさえ求まれば, 運動方程式は殆んど機械的に導かれるのがこの方法の特色!

---

[1] (5-1)の関数型が任意(微分可能)であるという意味で, 全く任意といっても無制限ではない!



この結果は初等的方法で求めたものと一致するか？

(5-15)(5-16)の両辺を加減すれば

$$m_1(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)+\frac{m_3}{2}\ddot{q}_1-\left(m_1-\frac{m_3}{2}\right)g=0 \quad (5\text{-}17)$$

$$m_2(\ddot{q}_1-\ddot{q}_2)+\frac{m_3}{2}\ddot{q}_1-\left(m_2-\frac{m_3}{2}\right)g=0 \quad (5\text{-}18)$$

$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=\ddot{x}_1,\quad \ddot{q}_1-\ddot{q}_2=\ddot{x}_2,\ -\ddot{q}_1=\ddot{x}_3$ とおけば(5-17).(5-18)は

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= m_1g+\frac{1}{2}(m_3\ddot{x}_3-m_3g) \\ m_2\ddot{x}_2 &= m_2g+\frac{1}{2}(m_3\ddot{x}_3-m_3g) \end{aligned}\right\}$$

$m_3\ddot{x}_3-m_3g\equiv -T$ とおけば,

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1=m_1g-\frac{T}{2},\quad m_2\ddot{x}_2=m_2g-\frac{T}{2},\quad m_3\ddot{x}_3=m_3g-T}$$

このようにLagrange方程式はNewtonの運動方程式(直交座標系)より遥かに便利な場合が多いので使用に馴れることをすすめる!

5-3. Hamilton方程式

先づLagrange方程式からエネルギー保存則を導いてみよう。そのため

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right)=0 \quad (5\text{-}17)$$

から出発 第1項をかきかえ.

$$0=\sum_\alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right] \quad (5\text{-}18)$$

この第2.第3項は $-\frac{dL}{dt}=-\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha-\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha$ にほかならぬから

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L\right)=0,\qquad \sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L=H=\text{const}, \quad (5\text{-}19)$$

次に $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\equiv p_\alpha}$ とおけば (5-20)

Lagrange eq. は $\frac{dp_\alpha}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$, $\boxed{\dot{p}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}$ (5-21)

(5-19) → $\boxed{H=\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-L}$ (5-22)

$$\Delta H=\sum_\alpha\Big(\Delta p_\alpha\cdot\dot{q}_\alpha+p_\alpha\Delta\dot{q}_\alpha-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{=\dot{p}_\alpha}\Delta q_\alpha-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=p_\alpha}\Delta\dot{q}_\alpha\Big)=\sum_\alpha\left(\dot{q}_\alpha\Delta p_\alpha-\dot{p}_\alpha\Delta q_\alpha\right) \quad \cdots(5\text{-}23)$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha,\qquad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha \qquad (5\text{-}24)}$$

これを<u>Hamilton方程式</u>といい, q_α, p_αの関数として表わされた全エネルギーHを<u>Hamilton関数</u>(Hamiltonian)という。Hamilton方程式も"任意の座標"に

ついて同じ形なので便利である。

例) Kepler問題　$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \equiv p_r, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \equiv p_\theta \; ; \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}.$$

$$H = p_r \cdot \dot{r} + p_\theta \cdot \dot{\theta} - L = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{GMm}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2}, & \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 & \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{-p_\theta^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} = \text{const} \end{aligned}\right.$$

この場合も　H が θ を含まないので $p_\theta = \text{const}$ となった。(循環座標と保存則)

運動量の定義と同等な方程式が現われたりして Lagrange 方程式より不便に見えるが Lagrange 方程式は 1次元振動子の場合特に便利ではない。4-1 実例(1)の(4-4)のように($\sqrt{k}\,x$, $\sqrt{m}\,v$)から極座標($\sqrt{2H}$, θ)へ移ると簡単に解けた。この変換は(5-1)のように座標から座標へ移る変換ではなくて もっと一般な(座標，運動量)→(座標，運動量)という変換である。このような変換によって運動方程式をときやすくすることを考えるには Hamilton 方程式の方が便利なのである。

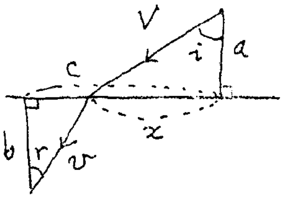
5-4 展望:

運動方程式の解を求めるため これを何回か積分するのは容易でない。このとき保存される量が一つみつかれば積分の手間が一回省かれる。保存される量(保存量)が沢山みつかれば，それだけ解を求めるのが容易になる。ところが H (又は L) がある座標 q を陽に含まぬとき，$p = \frac{\partial L}{\partial q}$ (これを q に共役な運動量という)は保存量であることを知った。H が q を含まぬとき 考えている力学系に $\overset{\text{のみ}}{q}$ を変化させたとき起るような変形を加えても力学系のエネルギー H に変化が起らない。そこで力学系を(頭の中で)いろいろ変形させてみて 特にある変形に対してエネルギーの変化が起らぬことを知ったとすれば そのことが実は運動方程式を1回積分する方法を発見したことになる。その変形の際変化する q を一つの座標とする新しい座標系に移れば，q に共役な運動量 p が保存量なのである。こうして物理的な直観によって運動方程式の解法が発見できるとすれば非常に都合よいことである。このプログラムを実行するには 如何なる座標変換を行ってもその形が変らないような運動方程式を知っていることが重要である。

6 座標の選び方に無関係に運動法則を言い表わすこと — 変分原理:

6-1 Fermatの原理: 光は最短時間で到達するような道をえらぶ

(1) 屈折: 多分高校でもならったこと:



$$t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{V} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v} \qquad (6\text{-}1)$$

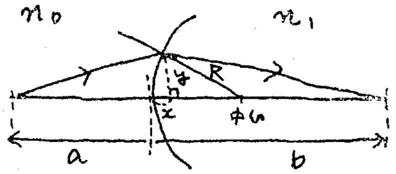
Optical path:

$$S \equiv ct = N\sqrt{a^2+x^2} + n\sqrt{b^2+(c-x)^2}, \qquad N \equiv \frac{c}{V}, \quad n = \frac{c}{v} \qquad \cdots(6\text{-}2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = N\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - n\frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = N\sin i - n\sin r = 0 \quad (6\text{-}3)$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{N} = \frac{V}{v} \qquad (6\text{-}4)$$

(2) 球面での屈折: この原理でレンズの公式も出そう!



$$S = n_0\sqrt{(a+x)^2+y^2} + n_1\sqrt{(b-x)^2+y^2}$$

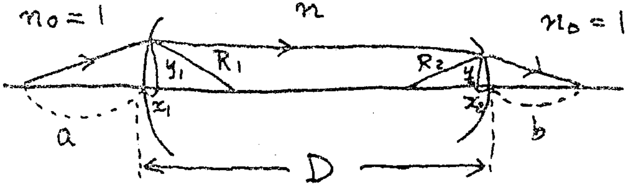
$$(R-x)^2 + y^2 = R^2 \qquad x \approx \frac{y^2}{2R}$$ $y \ll R$ (近軸近似) のみ考える. (6-5)

$$S \approx n_0\sqrt{a^2+\left(1+\frac{a}{R}\right)y^2} + n_1\sqrt{b^2+\left(1-\frac{b}{R}\right)y^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = n_0\frac{\left(1+\frac{a}{R}\right)y}{\sqrt{a^2+\left(1+\frac{a}{R}\right)y^2}} + n_1\frac{\left(1-\frac{b}{R}\right)y}{\sqrt{b^2+\left(1-\frac{b}{R}\right)y^2}} \approx \frac{n_0}{a}\left(1+\frac{a}{R}\right)y + \frac{n_1}{b}\left(1-\frac{b}{R}\right)y = 0$$

$$n_0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{R}\right) + n_1\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right) = 0, \quad \boxed{\frac{n_0}{a}+\frac{n_1}{b} = \frac{n_1-n_0}{R}} \qquad (6\text{-}6)$$

(3) レンズ:



$$S = \sqrt{(a+x_1)^2+y_1^2} + n\sqrt{(D-x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(b+x_2)^2+y_2^2}. \qquad (6\text{-}7).$$

$$\approx \sqrt{a^2+\left(1+\frac{a}{R_1}\right)y_1^2} + n\sqrt{D^2+\left(1-\frac{D}{R_1}\right)y_1^2+\left(1-\frac{D}{R_2}\right)y_2^2-2y_1y_2} + \sqrt{b^2+\left(1+\frac{b}{R_2}\right)y_2^2} \quad \cdots(6\text{-}8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = 0: \quad \frac{\frac{a}{R_1}+1}{a}y_1 + n\frac{\left(1-\frac{D}{R_2}\right)y_1 - y_2}{D} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{R_1}\right)y_1 + n\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{R_1}\right)y_1 - \frac{n}{D}y_2 = 0, \quad (6\text{-}9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = 0: \quad \frac{\frac{b}{R_2}+1}{b}y_2 + n\frac{\left(1-\frac{D}{R_2}\right)y_2 - y_1}{D} = \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{R_2}\right)y_2 + n\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{R_2}\right)y_2 - \frac{n}{D}y_1 = 0. \quad (6\text{-}10)$$

$$\text{or} \ \boxed{\left(\frac{1-n}{R_1}+\frac{1}{a}+\frac{n}{D}\right)y_1 - \frac{n}{D}y_2 = 0, \quad -\frac{n}{D}y_1 + \left(\frac{1-n}{R_2}+\frac{1}{b}+\frac{n}{D}\right)y_2 = 0 \quad (6\text{-}11)}$$

(6-11)の2式から得た y_2/y_1 が一致するためには:

$$\left(\frac{n}{D}+\frac{1}{a}-\frac{n-1}{R_1}\right)\left(\frac{n}{D}+\frac{1}{b}-\frac{n-1}{R_2}\right)-\left(\frac{n}{D}\right)^2=0\ , \qquad (6-12)$$

これから

$$\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{n-1}{R_1}}+\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{n-1}{R_2}}+\frac{D}{n}=0 \quad \text{(厚いレンズの写像公式)}} \qquad (6-13)$$

$$D\to 0:\ \boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f} \quad \text{(うすいレンズの公式)}} \qquad (6-14)$$

[補足] 大学では幾何光学をあまりやる機会がないので、厚いレンズの性質を補足しておこう。(6-13)はあまり簡単でないが、距離の測り方をかえると(6-13)も(6-14)のような形にかけることを示そう。

a) 厚いレンズの焦点距離: (6-12)で $b\to\infty$, $a\to f_a$ とおけば

$$\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}+\frac{1}{f_a}\right)\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)-\left(\frac{n}{D}\right)^2=0 \ \to\ f_a=\frac{\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}}{\left(\frac{n}{D}\right)^2-\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)} \qquad (6-15)$$

$\left.\begin{matrix}a\to\infty\\ b\to f_b\end{matrix}\right\}$ とおけば 同様にして $\to\ f_b=\dfrac{\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}}{\left(\frac{n}{D}\right)^2-\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)}$ (6-16)

分母 $\Delta\equiv\left(\frac{n}{D}\right)^2-\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)=\frac{n(n-1)}{D}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{(n-1)^2}{R_1R_2}$ (6-17)

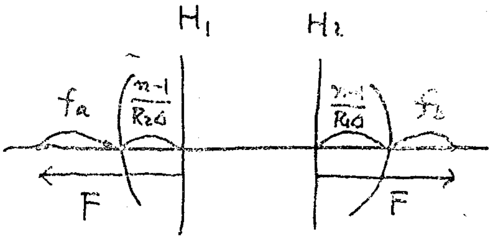
は共通であるが、$f_a \neq f_b$. しかし

$$f_a+\frac{n-1}{R_2\Delta}=f_b+\frac{n-1}{R_1\Delta}=\frac{n}{D\Delta}\equiv F \qquad (6-20)$$

このことはレンズ面からではなくて、図の H_1, H_2 から距離を測ることにすれば左、右の焦点距離は同じ F となることを示している。

H_1, H_2 を厚いレンズの主面(Principal Plane)という。

b) 厚いレンズの主面表示: 次に実物、像までの距離も主面から測ることを考える。(6-12)を展開:



$$\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)+\frac{1}{ab}-\left(\frac{n}{D}\right)^2=0 \qquad (6-21)$$

$$-\Delta+\frac{1}{a}\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_2}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{n}{D}-\frac{n-1}{R_1}\right)+\frac{1}{ab}=0\ ,\quad \text{or}$$

$$ab-b\left(\frac{n}{D\Delta}-\frac{n-1}{R_2\Delta}\right)-a\left(\frac{n}{D\Delta}-\frac{n-1}{R_1\Delta}\right)+\frac{1}{\Delta}=0\ .$$

$$\left(a+\frac{n-1}{R_2\Delta}\right)\left(b+\frac{n-1}{R_1\Delta}\right)-\frac{(n-1)^2}{R_1R_2\Delta^2}-(a+b)\frac{n}{D\Delta}-\frac{1}{\Delta}=0 \qquad (6-22)$$

$A=a+\dfrac{n-1}{R_2\Delta}$, $\quad B=b+\dfrac{n-1}{R_1\Delta}$ はそれぞれ主面からの距離 (6-23)

(6-22)をA, Bで表わせば

$$AB-(A+B)\frac{n}{D\Delta}=\frac{1}{\Delta}\left[1-\frac{n(n-1)}{\Delta D}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{(n-1)^2}{\Delta R_1R_2}\right]=\frac{1}{\Delta}\left(1-\frac{\Delta}{\Delta}\right)=0, \qquad (6-24)$$

$\dfrac{n}{D\Delta}\equiv F$ であるから(6-20), $\quad AB=(A+B)F$, $\therefore$ $\boxed{\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\dfrac{1}{F} \qquad (6-25)}$

厚いレンズでも距離を主面から測ることにすればうすいレンズと同じ公式が成立つ!!

6-2 最速降下曲線：

図1 $\widehat{OA}$ は2定点O, Aを結ぶマサツのないスベリ台, OからAまですべり降りるのに要する時間tを極小ならしめるようなすべり台のカーブ $y=y(x)$ を求めよ。(これは歴史上エピソードに富んだ問題である[1])

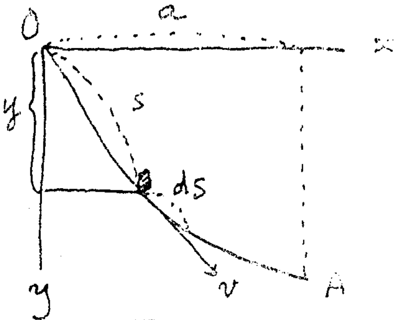
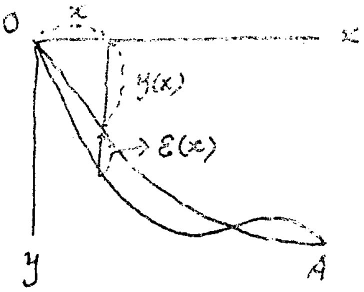


図1

$$t=\int_{x=0}^{x=a}\frac{ds}{v}\ ,\qquad v^2=2gy,\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx\ \rightarrow\ \text{極小}$$ とする関数 $y=y(x)$ を求めよ. (6-26)



tを極小にするカーブが $y=y(x)$ なら, これをわずかに勝手に変形し $y'=y(x)+\varepsilon(x)$ $(|\varepsilon|\ll y)$ としてもtには変化が殆んどないであろう。即ち

$$0=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a dx\left(\frac{\sqrt{1+(y'+\varepsilon')^2}}{\sqrt{y+\varepsilon}}-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)\quad(6\text{-}27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{y+\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{\varepsilon}{2y^{3/2}}+\cdots$$

$$\sqrt{1+(y'+\varepsilon')^2}=\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\varepsilon'+\cdots$$

$$\Bigg\}\ \frac{\sqrt{1+(y'+\varepsilon')^2}}{\sqrt{y+\varepsilon}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}+\frac{y'\varepsilon'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\sqrt{1+y'^2}\,\varepsilon}{2y^{3/2}}\cdots\quad\cdots(6\text{-}28)$$

$$(6\text{-}27)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a dx\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}\varepsilon\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\varepsilon(x)\Bigg|_{x=0}^{x=a}-\int_0^a dx\left(\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}+\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}\right)\varepsilon(x)\right]=0$$

$$\cdots(6\text{-}30)$$

$\varepsilon(0)=\varepsilon(a)=0$ であるから 第1項 $=0$, $\varepsilon(x)$ は小さいが勝手な関数だから

第2項 $=0$ なるためには $$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}+\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}=0\quad\cdots(6\text{-}31)$$

$$\text{or}\quad\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}}+\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}=0,\ \rightarrow\boxed{\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{1}{2y\sqrt{1+y'^2}}=0,\ (6\text{-}32)}$$

これがtを極小にする関数 $y=y(x)$ が満足する微分方程式でこれを解けば $y(x)$ が求まる。 $y'=\dfrac{dy}{dx}\equiv\tan\theta$ $\cdots$ (6-33) とおけば (6-32) は

$$\frac{d}{dx}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2y}=\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{2y}\right)=0\ \rightarrow\ \frac{d\theta}{dx}=-\frac{1}{2y}\quad(6\text{-}34)$$

$$(6\text{-}33)\rightarrow\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=-\frac{dy}{d\theta}\frac{1}{2y}=\tan\theta\ \rightarrow\ -\frac{dy}{2y}=\tan\theta\cdot d\theta\quad(6\text{-}35)$$

---

1) 小堀, カジョリの数学史又はE.T.ベル：数学をつくった人人. 田中・銀林訳(東京図書発行)

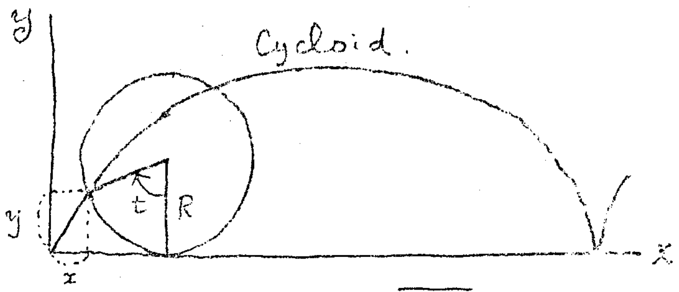
両辺積分：$\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta + C = 2\int\frac{d\cos\theta}{\cos\theta} + C = 2\ln\cos\theta + C$, $\underline{\ln y = 2\ln\cos\theta + C}$

$\underline{y = A\cos^2\theta = \frac{A}{2}(1+\cos 2\theta) \quad (6\text{-}36)}$, (6-34)に代入、$\frac{dx}{d\theta} = -2y =$ $= -A(1+\cos 2\theta)$, $\underline{x = C - A\theta - \frac{A}{2}\sin 2\theta \cdots (6\text{-}37)}$, $2\theta = \pi - t$ とおけば $x = B + \frac{A}{2}t - \frac{A}{2}\sin t$, $y = \frac{A}{2}(1-\cos t) \cdots (6\text{-}38)$ A.B はこの曲線が2点O.Aを通るようにきめればよい。特に $x=0$. $y=0$ を通るためには $B=0$. $\frac{A}{2} \equiv R$ とおけば、

$$\left.\begin{aligned} x &= R(t-\sin t) \\ y &= R(1-\cos t) \end{aligned}\right\} (6\text{-}39)$$

これはサイクロイドの方程式 ⟶

この曲線はいろいろな処に顔をだす．



<u>変分問題</u>：最速降下曲線の問題は

未知関数 y(x) を含む積分 $t = \int_0^a L(y(x), y'(x))dx$ $\left(L \equiv \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}\right)$ を最小にするように y(x) を決定せよ、という問題で、極大小問題とよく似ている。後者では x の関数 t=t(x) を極小ならしめる x を求めるのに反し、積分tは関数 y(x) の形が変るに従って変化する、いわばtは関数型の関数である。(これをtは y(x) の<u>汎関数</u>（はんかんすう）Functional)

微積分の極大小問題では x を少し変動しても t(x) が変化しない点が極大小点で、そこでは $t'(x) = 0$：これが極大小点をきめる方程式であった。上の場合もこれとよく似ている。y(x) がtを極大小にする関数なら $y(x) \to y(x) + \varepsilon(x)$ （以後 $\varepsilon(x) \equiv \delta y(x)$ とかく）でおきかえても積分tの変化δtは殆んど0であるはず、即ち

$$\delta t = \int_0^a dx\left[L(y+\delta y, y'+\delta y') - L(y, y')\right] \qquad (6\text{-}40)$$

$$= \int_0^a dx\left[L(y, y') + \frac{\partial L(y, y')}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'}\delta y' - L(y, y')\right]$$

$$= \int_0^a dx\left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y(x)\Big|_0^a}_{=0} + \int_0^a dx\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y(x) = 0$$

これから求める y(x) が満足する微分方程式：$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'(x)} = 0. \ (6\text{-}41)}$ が得られ，これを解いて y(x) が求まる。というのが上の例の話のスジである。

$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}$ であるから、(6-41) は $\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}\right) = 0$ となる。これは (6-31) に他ならぬ。このように y(x) の汎関数tを極大小ならしめる y(x) を求める問題を<u>変分問題</u>(Variation Prob.) という。これは(6-31)又は(6-41)のような微分方程式を解く問題になる。(6-41) を変分法に於ける<u>オイラーの方程式</u>という。

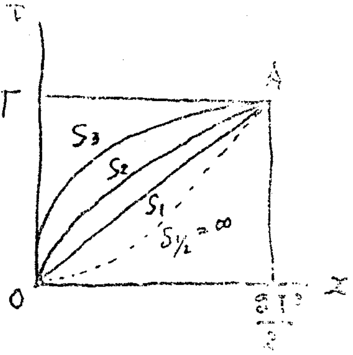
6－3 作用原理（Action Principle）

Eulerの方程式(6-41)はLagrange方程式と全く同じ形をしている。ということは，Lagrange方程式は積分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(x(t),\dot{x}(t)) \qquad (6\text{-}42)$$

が極大小（或は停留値）であるという要求から得られることを示している。Lagrange方程式をみたす $x(t)$ が運動を正しく記述するのであるから，このことは，物体の運動は $x(t)$，$\dot{x}(t)$ の汎関数 S（これを作用という）の値を最小(大)ならしむるように起ることを示している。つまり光学におけるFermatの原理に相当するものが力学にも存在することを示している。その内容を実例について具体的にしらべてみよう：

例1）落体のLagrangian：$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2+mgx$，



従って

$$S=\int_0^T dt\left[\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2+mgx(t)\right] \qquad (6\text{-}43)$$

a）これに落体の運動の正解 $x(t)=\frac{g}{2}t^2$，$\dot{x}(t)=gt$ を代入してSの値を計算すれば

$$S_2=\int_0^T dt\left[\frac{m}{2}g^2t^2+mg\frac{g}{2}t^2\right]=\underline{mg^2T\times\frac{1}{3}}, \quad (6\text{-}44)$$

となる。次にこの問題の解ではない勝手な関数を(6-43)に代入して計算してみる。

b）0とAを直線で結ぶ；$x(t)=\frac{gT^2}{2}\left(\frac{t}{T}\right)=\frac{gT}{2}t$，$\dot{x}(t)=\frac{gT}{2}$ を代入すれば

$$S_1=\int_0^T dt\left[\frac{m}{2}\frac{g^2T^2}{4}+\frac{mg^2T^2}{2}\frac{t}{T}\right]=\frac{mg^2}{2}\left(\frac{T^3}{4}+\frac{T^3}{2}\right)=\frac{mg^2T^3}{3}\times\frac{9}{8}. \quad (6\text{-}45)$$

となり，$S_1>S_2$ である。

c）次に0，Aを3次曲線で結ぶ $x(t)=\frac{gT^2}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^3$，$\dot{x}(t)=\frac{3}{2}\frac{gt^2}{T}$ を代入すれば

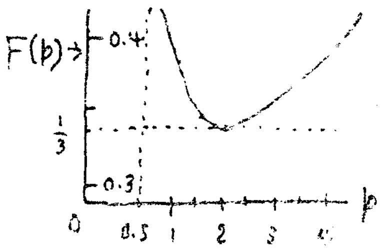
$$S_3=\int_0^T dt\left[\frac{m}{2}\frac{9}{4}\frac{g^2}{T_8}t^4+mg^2\frac{t^3}{2T}\right]=mg^2T^3\left(\frac{9}{8\times5}+\frac{1}{2\times3}\right)=\frac{mg^2T^3}{3}\left(1+\frac{7}{40}\right) \quad (6\text{-}46)$$

となって，この場合も $S_3>S_2$ である。（図参照）正解の両側でSは大きい：

d）更に一般的に0，Aを通るp次式：$x(t)=\frac{gT^2}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^p$，$\dot{x}=\frac{gT}{2}p\left(\frac{t}{T}\right)^{p-1}$ を代入すれば

$$S_p=\int_0^T dt\left[\frac{mg^2T^2}{8}p^2\left(\frac{t}{T}\right)^{2p-2}+\frac{mg^2T^2}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^p\right]=mg^2T^3\left(\frac{p^2}{8(2p-1)}+\frac{1}{2(p+1)}\right)$$

$$\equiv\underline{mg^2T^3F(p)}\ (6\text{-}47),\quad F(p)=\frac{p^2}{8(2p-1)}+\frac{1}{2(p+1)},$$



となる。F(p)をpの関数として図示すれば ⟶

正解 $p=2$ で S_p は極小値を示す。(1)

この例からわかったことは：落体のLagrangianを用いて作った作用(S-43)は落体の正解を代入したとき極小になるということである。

同様，振子のLagrangianを用いて作った作用は，振子の正解によって極小(大)となるはずだ。

---

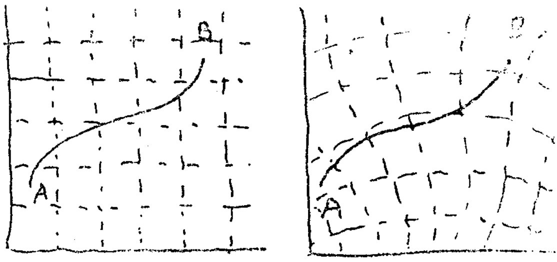
1) t^p が $x(t)$ の最も一般的な変え方ではないが，関数型の関数，変分法の具体的理解が得られ

このように力学系が（落体、振子…などと）指定されれば、Lの形がきまり、それを用いて作ったSを極小(大)ならしめる$x(t)$が系の運動を記述する解であるから、作用Sを極値ならしめよという命題：

$$\boxed{\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)) = 0} \qquad (6-48)$$

は運動の法則の役割を演ずる。これを作用原理という。はじめに示したようにFermatの原理から幾何光学上の諸法則が導かれるのと同じ様に、作用原理から出発して力学上の諸法則を導くことができる。従って作用原理を力学の根本原理（公理）と考えて、力学理論を展開することができる。

Fermatの原理や作用原理はある物理量（光路程とか作用）を極小(大)ならしめる軌道$\overset{\frown}{AB}$を求めよ、という命題である。軌道$\overset{\frown}{AB}$を数式で表わすには座標を導入しなければならない。しかし、作用とか光路程という量は座標の選び方には無関係な物理量と考えられるし、それを極大小ならしめることは、数学的表現のため人為的に設定した座標のとり方には無関係と考えられる。即ち、作用原理は力学原理を座標の選び方に無関係に表現している。この原理から導かれるLagrange方程式が座標のとり方に無関係に、同じ形をしているのはむしろ当然であろう。

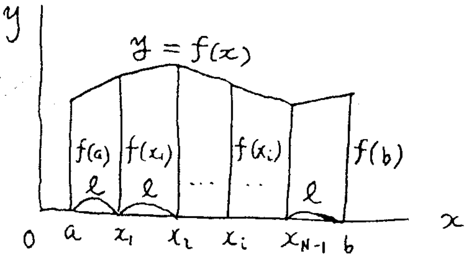


作用原理は力学のみならず、電磁気学、相対論、量子力学においても重要な役割を演ずるが、作用原理から出発して体系的な力学理論を作りあげることは、「力学」の講義においておこなわれるであろう。

Fermatの原理と作用原理の類似、つまり幾何光学と質点力学の類似性は、ハミルトン力学の発見、波動力学（量子力学）の発見の手がかりとなったという厂史がある。

〔補足〕変分と微分，條件附変分とLagrange Multiplier：

(1) 変分と微分：変分は微分とよく似ている。その理由を明らかにするため，積分を和の極限で表わせば；



$$I[f] = \int_a^b dx\ L\left(f(x),\ f'(x)\right)$$

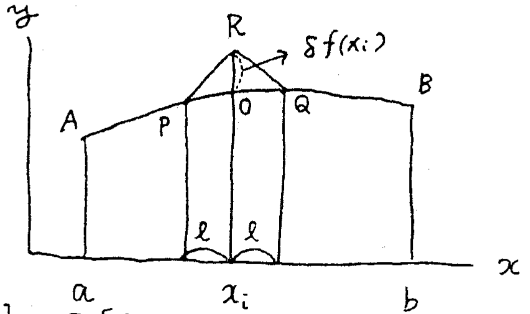
$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \ell\to 0}} \ell\Big[L\Big(f(a),\ \frac{f(x_1)-f(a)}{\ell}\Big) + $$
$$+ L\Big(f(x_1),\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\ell}\Big) + \cdots\cdots$$
$$+ L\Big(f(x_{i-1}),\ \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\ell}\Big) + L\Big(f(x_i),\ \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\ell},\ + \cdots$$
$$+ L\Big(f(x_{N-1}),\ \frac{f(b)-f(x_{N-1})}{\ell}\Big)\Big] \equiv I\left(f(a),\ f(x_1),\ \cdots,\ f(b)\right) \cdots (A1)$$

となる。これは $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_{N-1}),\ f(b)\ (N\to\infty)$ なる無限個の変数の関数と考えられ，$f(\alpha),\ f(x_1),\cdots,f(b)$ を指定することは関数 $y=f(x)$ の形を指定することであり，$f(a),f(x_1),\cdots,f(b)$ を変動することは関数 $y=f(x)$ の関数形を変動することである。従って，I が関数 $f(x)$ の関数形の関数（汎関数）であるということは，$I[f]$ が $f(x)$ の形を指定する（連続）無限個の変数の関数であるというのと同じである。上の式 (A-1) を $f(x_i)$ で微分すれば

$$\frac{\partial I\left(f(a),f(x_1),\cdots,f(x_i),\cdots,f(b)\right)}{\partial f(x_i)} = \ell\left(\frac{\partial L}{\partial f(x_i)} + \frac{\partial L}{\partial f'(x_{i-1})}\frac{1}{\ell} - \frac{\partial L}{\partial f'(x_i)}\frac{1}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial I\left(f(a),\cdots,f(b)\right)}{\ell\,\partial f(x_i)} = \frac{\partial L}{\partial f(x_i)} - \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial L}{\partial f'(x_i)} - \frac{\partial L}{\partial f'(x_{i-1})}\right) = \frac{\partial L}{\partial f(x_i)} - \frac{d}{dx_i}\frac{\partial L}{\partial f'(x_i)} \quad (A2)$$

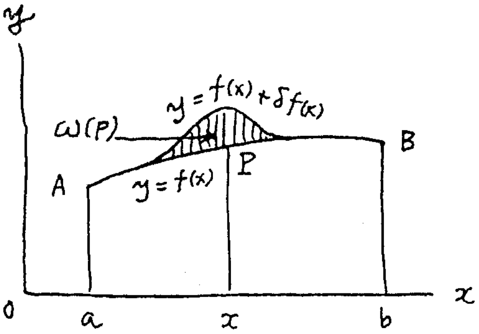
となる。この式 (A-2) の右辺は $\delta I/\delta f(x_i)$ にほかならぬから，変分 $\delta I/\delta f(x)$ は連続無限変数関数 $I[f]$ を $\ell f(x)$ で微分したもの $\partial I/\partial(\ell f(x))$ に他ならぬ。このように変分は連続無限変数の関数（汎関数）の偏微分にほかならぬから，微分と変分が類似のルールに従うのは当然であろう。上の $\ell f(x_i)$ による微分を次のように解することができる。右の図で APRQB で表わされる関数を $y=f(x)+\delta f(x)$，APOQB で表わされる関数を $y=f(x)$ とすれば



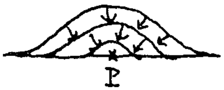
$$\frac{\delta I}{\delta f(x_i)} = \lim_{\delta f\to 0}\frac{I[f(a),f(x_1),\cdots,f(x_i)+\delta f(x_i),\cdots f(b)] - I[f(a),\cdots f(x_i)\cdots f(b)]}{\ell\,\delta f(x_i)}$$

$$= \lim_{\substack{\text{三角形PRQ} \\ \text{の面積}\to 0}} \frac{I[f+\delta f]-I[f]}{\text{三角形PRQの面積}} \quad (A-3)$$ これを更に一般化すれば；

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\omega(P)\to 0} \frac{I[f+\delta f] - I[f]}{\omega(P)} \qquad (A\text{-}4)$$



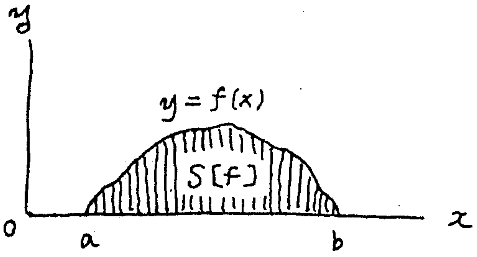
とかける。但し.$\omega(P)$は右の図で $y=f(x)+\delta f(x)$ と $y=f(x)$ が囲むレンズ状の領域の面積で

$\omega(P)\to 0$ とは.  のように点Pへ向って$\omega(P)$をつぶしてゆくことを意味するものとする。

これは

$$\omega(P) = \int \delta f(x)\,dx \;\approx\; \ell f(x) \;\to\; 0. \quad (A\text{-}5)$$

を行うことに相当している。



(2) 等周問題と条件附変分: 図の$x=a.b$で長さℓの糸の両端が固定されている。糸とx軸の間の面積$S[f]$を極大ならしめるような糸の形 $y=f(x)$を求めよ。

$$S[f] = \int_a^b dx\, f(x) \quad \text{であるから} \quad \delta S = \int_a^b dx\, \delta f(x) = 0 \qquad (A\text{-}6)$$

を満足する$f(x)$を求めればよいが.各点での変形$\delta f(x)$を勝手に許したら糸の長さも変る。

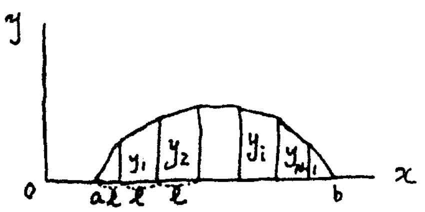
糸の長さ

$$\ell = \int_a^b dx \sqrt{1+f'(x)^2} = \text{一定であるから} \quad \delta\ell = 0 = \int_a^b dx \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,\delta f'(x)$$

$$= -\int_a^b dx \left(\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)\cdot\delta f(x), \quad \text{即ち} \quad \int_a^b dx\left(\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\cdot\delta f(x) = 0. \quad (A\text{-}7)$$

$\delta f(x)$は勝手には選べなくて.(A-7)を満足するように変動させ.しかも$S[f]$を極大ならしめよ.という問題である。$\delta f(x)$に条件がついている変分法を条件附変分法という。

(3) Lagrange Multiplier: (A-7)が$\delta f(x)$に対してどの程度の制限を与えるかしらべるため.積分を和で表わしてみよう。 $f(x_i)=y_i$, $\delta f(x_i)=\delta y_i$



$\dfrac{d}{dx_i}\dfrac{f'(x_i)}{\sqrt{1+f'(x_i)^2}} \equiv g_i$ とおけば(A-6).(A-7)は

$$\ell\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i = 0 \cdots (A\text{-}8). \qquad \ell\sum_{i=1}^{N-1} g_i\,\delta y_i = 0, \quad \cdots \quad (A\text{-}9)$$

とかける。(A-9)は $\delta y_2, \delta y_3, \cdots, \delta y_{N-1}$を勝手に選ぶと δy_1は

$$\delta y_1 = -\frac{g_2\delta y_2 + g_3\delta y_3 + \cdots + g_{N-1}\delta y_{N-1}}{g_1} \qquad (A\text{-}10)$$

と決まり.δy_1が勝手に選べないというのが(A-7)による制限であることを物語っている。(A-10)を(A-8)に代入すれば

$$-\frac{1}{g_1}\left[g_2\delta y_2 + g_3\delta y_3 + \cdots\right] + \delta y_2 + \delta y_3 + \cdots\cdots$$

$$= \left(1-\frac{g_2}{g_1}\right)\delta y_2 + \left(1-\frac{g_3}{g_1}\right)\delta y_3 + \cdots + \left(1-\frac{g_{N-1}}{g_1}\right)\delta y_{N-1} = 0 \qquad (A-11)$$

となる。δy_2, δy_3, …, δy_{N-1} は自由に変動できるから、これから

$$1-\lambda g_i = 0 \qquad (i=2.3.\cdots.N-1). \quad 但し \quad \lambda \equiv \frac{1}{g_1} \qquad (A-12)$$

或は

$$1-\lambda\frac{d}{dx_i}\frac{y_i'}{\sqrt{1+y_i'^2}} = 0 \quad (i=2,3,\cdots,N-1), 但し \quad 1-\lambda\frac{d}{dx_1}\frac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2}} = 0, \quad (A-13)$$

が得られる。(A-13) は $i=1.2.3.\cdots.N-1.$ の x_i、即ちすべての x について

$$1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}} = 0 \qquad (A-14)$$

が成立つことを示している。これが S を極大ならしめるカーブ $y=f(x)$ が満足する微分方程式。これを解けば解は λ を含む $f(x.\lambda)$ で与えられるが λ はカーブの長さが l になるように決めればよい。

(A-14)式は、(A-6) から、$\delta f(x)$ の制限条件 (A-7) の λ 倍を引いて得る式

$$(A-6)-\lambda(A-7) = \int_a^b dx\left(1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)\delta f(x) = 0 \qquad (A-15)$$

で $\delta f(x)$ に制限がないと考えて得られる式と同じである。

一般に $\int dx\, g(x)\delta f(x) = 0$ なる制限のもとに $\int dx\, D(x)\delta f(x) = 0$ ならしめる $f(x)$ は $\int dx\,(D(x)-\lambda g(x))\cdot\delta f(x) = 0$ で $\delta f(x)$ を無制限としたときの

$$D(x) - \lambda g(x) = 0 \qquad (A-16)$$

を満足することが同様に証明される。λ をラグランジュの不定乗数 (Lagrange's Multiplier) という。

(問題) δy_i に $\sum_{i=1}^{N-1} g_i\delta y_i = 0$ $\sum_{i=1}^{N-1} h_i\delta y_i = 0$ なる制限があるとき $\sum_{i=1}^{N-1} D_i\delta y_i = 0$ であるためには $D_i - \lambda g_i - \mu h_i = 0$ $(i=1.2.\cdots.N-1)$ であればよいことを示せ。

(4) 等周問題の解: S を極大ならしめる $f(x)$ を $y(x)$ とすれば、$y(x)$ は

$$(A-14): \quad \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\lambda} \qquad (A-17)$$

を満足する。積分して $y'/\sqrt{1+y'^2} = \dfrac{x+\alpha}{\lambda}$ α: 積分定数 (A-18) y'を求めれば $y' = \pm \dfrac{\frac{x+\alpha}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+\alpha}{\lambda}\right)^2}} = \pm\lambda \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-\left(\frac{x+\alpha}{\lambda}\right)^2}$. (A-19)

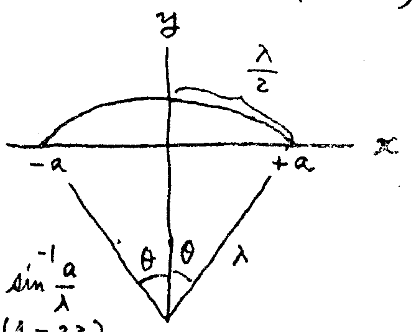
積分して.

$$y+\beta = \pm\lambda\sqrt{1-\left(\frac{x+\alpha}{\lambda}\right)^2}$$ β: 積分定数. (A-20)

或は

$$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \lambda^2$$ (A-21)

となり. 解は円! 座標を右図のようにとれば



$(\pm a+\alpha)^2 = \lambda^2 - \beta^2$. $\alpha = 0$ (A-22)

(A18)から. $\sqrt{1+y'^2} = 1/\sqrt{1-(x/\lambda)^2}$

λは $l = \int_{-a}^{+a} dx\sqrt{1+y'^2} = \int_{-a}^{+a} dx \dfrac{1}{\sqrt{1-(x/\lambda)^2}} = 2\lambda \sin^{-1}\dfrac{a}{\lambda}$ ···(A-23)

からきまる。 即ち $\sin\dfrac{l}{2\lambda} = \dfrac{a}{\lambda}$, a. l を与えたときこれから λが求まる。

λがきまれば(A-22)から $\beta^2 = \lambda^2 - a^2$ ときまり. 解は決定された。

Math. Taylor展開と変位演算子:

(問) $f(x+a) = f_0(x) + a f_1(x) + a^2 f_2(x) + a^3 f_3(x) + \cdots$

が成りたつように $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots$ をきめよ。

(解) a=0 とおけば $f(x) = f_0(x)$

$$\frac{\partial f(x+a)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+a)}{\partial a} = f_1(x) + 2a f_2(x) + 3a^2 f_3(x) + \cdots \xrightarrow{a\to 0} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f_1(x)$$

$$\frac{\partial^2 f(x+a)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x+a)}{\partial a^2} = 2f_2(x) + 2\cdot 3a^2 f_3(x) + 4\cdot 3a^3 f_4(x) + \cdots \xrightarrow{a\to 0} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 2f_2(x)$$

·· ······

$$\therefore \quad f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$$

$$\therefore \quad \boxed{f(x+a) = f(x) + \frac{a}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \cdots}$$

$$= \left[1 + \frac{a}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \cdots\right] f(x) = e^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x)$$

$\boxed{f(x+a) = e^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x)}$. $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$ をx方向にaだけズラす変位演算子という.

全く同様にして

$$\boxed{f(x+a, y+b, z+c) = e^{a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}} f(x, y, z)}$$

$$f(x+a.\ y+b.\ z+c) \approx f(x.y.z) + \frac{1}{1!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x.y.z)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x.y.z) + \cdots\cdots\cdots$$

$(x.y.z) \equiv \vec{r}$, $(a.b.c) \equiv \delta\vec{r}$. $\left(\frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \vec{\nabla}$ とおけば

$$\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla} = a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$f(\vec{r}+\delta\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\delta\vec{r}.\vec{\nabla})^n f(\vec{r}) = e^{\delta\vec{r}.\vec{\nabla}} f(\vec{r})$$

Math. 行列式

（高校では行列はやっても行列式はやっていない。何れ線形代数の講義で詳しいことはやるであろうから、要点だけ！）

(1) 2元1次方程式：

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=f_1 \\ a_2x+b_2y=f_2 \end{array}\right\} \text{を解けば} \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{f_1b_2-f_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \equiv \dfrac{\Delta(f.b)}{\Delta(a.b)} \\ y=\dfrac{a_1f_2-a_2f_1}{a_1b_2-a_2b_1} \equiv \dfrac{\Delta(a.f)}{\Delta(a.b)} \end{array}\right.$$

$\Delta(a.b) \equiv a_1b_2-a_2b_1$ を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ とかき、2次の行列式という。

(2) 3元1次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=f_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=f_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=f_3 \end{array}\right\} \text{を解いた結果も} \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\Delta(f.b.c)}{\Delta(a.b.c)} \\ y=\dfrac{\Delta(a.f.c)}{\Delta(a.b.c)} \\ z=\dfrac{\Delta(a.b.f)}{\Delta(a.b.c)} \end{array}\right\} \text{と書くことができる。}$$

但し $\Delta(a.b.c) \equiv$

$$\left.\begin{array}{l} \equiv(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2) \\ -(a_2b_1c_3+a_3b_2c_1+a_1b_3c_2) \end{array}\right\} \text{で、これを} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{とかき}$$

3次の行列式という。

(3) 行列式と ε 記号：

$$\Delta(a.b) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\epsilon_{ij}a_ib_j = \epsilon_{11}a_1b_1+\epsilon_{22}a_2b_2+\epsilon_{12}a_1b_2+\epsilon_{21}a_2b_1$$

が $\Delta(a.b) = a_1b_2 - a_2b_1$ と一致するためには $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$ $\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=1$ であればよい。逆に $\underline{\epsilon_{ij}=-\epsilon_{ji},\ \epsilon_{12}=1}$ なる ϵ_{ij} では、$\epsilon_{ij}+\epsilon_{ji}=0$. $\epsilon_{ii}+\epsilon_{ii}=2\epsilon_{ii}=0$, 従って $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$. $\epsilon_{21}=-\epsilon_{12}=-1$ である。従って2次の行列式は $\epsilon_{ij}=-\epsilon_{ji}$, $\epsilon_{12}=1$ なる ϵ_{ij} を用い、$\Delta(a.b)=\sum_{ij}\epsilon_{ij}a_ib_j$ と表わし得る。同様に

$$\Delta(a.b.c) = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2)$$

が $\Delta(a.b.c) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$

と表わし得るためには $\left.\begin{matrix}\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1\end{matrix}\right\}$ その他の $\epsilon_{ijk} = 0$

であればよい。これは

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{123} = 1$$

であること 即ち ϵ_{ijk} はその任意の2つの指標を入れかえると符号が変ること を示している。逆にこれから $\epsilon_{213} = -\epsilon_{123} = -1$, $\epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = \epsilon_{123} = 1$ など及び $\epsilon_{iik} = 0$ などをすべて導くことができる。一般にn個の添字を有する $\epsilon_{ijk\cdots z}$ が、任意の2つの添字の入れかえで符号をかえ、且つ $\epsilon_{123\cdots n} = 1$ であるとき これをレビ・チビタのε記号という。これを用いて作った

$$\Delta(a.b.c.\cdots,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\cdots\sum_{z=1}^{n} \epsilon_{ijk\cdots z}\, a_i b_j c_k \cdots z_z$$

をn次の行列式という。 n次の行列式

$$\Delta(a,\cdots,p,\cdots q,\cdots,z) = \sum_{i=1}^{n}\cdots\sum_{k=1}^{n}\cdots\sum_{l=1}^{n}\cdots\sum_{z=1}^{n} \epsilon_{i\cdots k\cdots l\cdots z}\, a_i \cdots p_k \cdots q_l \cdots z_z$$

で任意の2因子 p. q を入れかえたものは

$$\Delta(a,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,z) = \sum_{i}\cdots\sum_{k}\cdots\sum_{l}\cdots\sum_{z} \epsilon_{i\cdots k\cdots l\cdots z}\, a_i \cdots q_k \cdots p_l \cdots z_z$$

$$= \sum_{i}\cdots\sum_{l}\cdots\sum_{k}\cdots\sum_{z} \epsilon_{i\cdots l\cdots k\cdots z}\, a_i \cdots q_l \cdots p_k \cdots z_z$$

とかいてもよいから $= \sum_{i}\cdots\sum_{k}\cdots\sum_{l}\cdots\sum_{z} \epsilon_{i\cdots l\cdots k\cdots z}\, a_i \cdots p_k \cdots q_l \cdots z_z$

$$= -\sum_{i}\cdots\sum_{k}\cdots\sum_{l}\cdots\sum_{z} \epsilon_{i\cdots k\cdots l\cdots z}\, a_i \cdots p_k \cdots q_l \cdots z_z = -\Delta(a,\cdots p,q,\cdots z)$$

となり、これから 行列式 $\Delta(a.b\cdots)$ の a. b. … 中、任意の2つを入れかえると行列式は符号をかえる ことがわかる。また a. b. … 中に等しいものがあれば行列式は零となる。

(問題) $a_i \equiv a_i^1$, $b_i \equiv a_i^2$, …, $z_z \equiv a_i^n$ とおけば

$$\Delta(a^p, a^q, \cdots, a^x) = \epsilon_{pq\cdots x}\, \Delta(a^1, a^2, \cdots, a^n)$$

であることを示せ。

(4) 行列式を用いて1次方程式をとくこと.

先ず2元方程式 $(a_i x + b_i y = f_i)$ $(i=1.2)$ をとくため2次の行列式 $\Delta(a.b) = \sum_{ij} \epsilon_{ij}\, a_i b_j$ を考える。

$\frac{\partial\Delta(a.b)}{\partial a_i} = \sum_j \epsilon_{ij} b_j$, $\frac{\partial\Delta(a.b)}{\partial b_i} = \sum_j \epsilon_{ji} a_j$ であるから

$$\sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = \sum_{ij}\epsilon_{ij}a_ib_j = \Delta(a.b) \qquad \sum_i b_i \frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = \sum_{ij}\epsilon_{ij}b_ib_j = \Delta(b\,b) = 0$$

$$\sum_i a_i \frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = \sum_{ji}\epsilon_{ji}a_ia_j = 0 . \qquad \sum_i b_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = \sum_{ji}\epsilon_{ji}a_jb_i = \Delta(a.b)$$

これを用いて

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial a_i}(a_ix+b_iy) = \Delta(a.b)x = \sum_i\frac{\partial\Delta}{\partial a_i}f_i = \sum_{ij}\epsilon_{ij}f_ib_j = \Delta(f\ b)$$

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial b_i}(a_ix+b_iy) = \Delta(a.b)y = \sum_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i}f_i = \sum_{ji}\epsilon_{ji}a_jf_i = \Delta(a.f)$$

が得られ. これから $x = \Delta(f.b)/\Delta(a.b)$. $y = \Delta(af)/\Delta(a.b)$

3元方程式 $a_ix+b_iy+c_iz=f_i$ $(i=1.2.3)$ についても同様.

$$\frac{\partial\Delta(abc)}{\partial a_i} = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}b_jc_k, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = \sum_{jk}\epsilon_{jik}a_jc_k . \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = \sum_{jk}\epsilon_{jki}a_jb_k$$

これから

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{3} a_i\frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = \Delta . & \sum_i b_i\frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = 0 & \sum_i c_i\frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = 0 \\ \sum_i a_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = 0 & \sum_i b_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = \Delta . & \sum_i c_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = 0 \\ \sum_i a_i\frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = 0 & \sum_i b_i\frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = 0 . & \sum_i c_i\frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = \Delta \end{array}\right\}$$

これを用い.

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial a_i}(a_ix+b_iy+c_iz) = \Delta(abc)x = \sum_i f_i\frac{\partial\Delta}{\partial a_i} = \Delta(f.b.c)$$

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial b_i}(a_ix+b_iy+c_iz) = \Delta(abc)y = \sum_i f_i\frac{\partial\Delta}{\partial b_i} = \Delta(a.f\ c)$$

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial c_i}(a_ix+b_iy+c_iz) = \Delta(abc)z = \sum_i f_i\frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = \Delta(a.\ b.f)$$

が得られ. これから $x = \frac{\Delta(f\,b\,c)}{\Delta(a\,b\,c)}$. $y = \frac{\Delta(a\,f\,c)}{\Delta(a\,b\,c)}$. $z = \frac{\Delta(a\,b\,f)}{\Delta(a.b.c)}$

が得られる。全く同様にして. 4元, 5元, …, n元方程式を行列式を用いて解くことができることは明らかであろう。

(5) 行列(Matrix)と行列式(Determinant):

連立方程式 $\sum_{\alpha=1}^{n} a_i^{\alpha} x_\alpha = f_i$ $(i=1.2.\cdots n)$ をとくことは, 1次変換

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad f = A\cdot x$$

の逆変換 $x = A^{-1}f$ or $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n}(a^{-1})_\alpha^{\ i} f_i$ を求めることである.

$n = 2.\ 3.$ の場合から推して. 上の方程式の解は

$$x_\alpha = \frac{1}{\Delta(a^1, a^2, \cdots a^n)} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \Delta(a^1, a^2, \cdots, a^n)}{\partial a_i^{\alpha}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \Delta(a^1, \cdots a^n)}{\partial a_i^{\alpha}} f_i \quad \equiv \sum_{i=1}^{n} (a^{-1})_{\alpha i} f_i$$

で与えられるから. 変換 A の逆変換 A^{-1} の行列要素 $(a^{-1})_{\alpha i}$ は $\dfrac{\partial \Delta(a^1 \cdots a^n)}{\partial a_i^{\alpha}}$ で与えられる。

次に f_i に 1 次変換; $y_p = \sum_{i=1}^{n} b_p{}^i f_i$ を行えば (即ち $y = B \cdot f$)

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} b_p{}^i \sum_{\alpha=1}^{n} a_i{}^\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} C_p{}^\alpha x_\alpha \quad (\text{or} \quad y = B \cdot A x = C x)$$

$C_p{}^\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} b_p{}^i a_i{}^\alpha$ である。行列 C の行列式 $\Delta(C^1. C^2. \cdot\ . C^n)$ を求めてみよう。 $\Delta(C^1 \cdots C^n) = \sum_{i,j,\cdots,z} \epsilon_{i,j,\cdots,z} C_i{}^1 C_j{}^2 \cdots C_z{}^n =$

$$= \sum_{i,j\cdots z} \sum_{i',j'\cdots z'} \epsilon_{i.j.\cdots,z} \; b_i{}^{i'} a_{i'}{}^1 \; b_j{}^{j'} a_{j'}{}^2 \cdots\cdots b_z{}^{z'} a_{z'}{}^n$$

$$= \sum_{i,j\cdots z} \sum_{i',j',\cdots z'} \epsilon_{i,j\cdots z} b_i{}^{i'} b_j{}^{j'} \cdots b_z{}^{z'} \; a_{i'}^1 \; a_{j'}^2 \cdots a_{z'}^n$$

$$= \sum_{i',j'\cdots z'} \Delta(b^{i'}. b^{j'}. \cdots, b^{z'}) \, a_{i'}^1 \; a_{j'}^2 \cdots a_{z'}^n \,,$$

(3) の(問題) によれば $\Delta(b^{i'}. b^{j'}. \cdots b^{z'}) = \varepsilon^{i'.j'\cdots,z'} \Delta(b^1. b^2 \cdots b^n)$

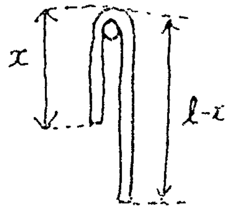
であるから

$$\Delta(C^1 \cdots C^n) = \Delta(b^1 \cdots b^n) \sum_{i'j'\cdots z'} \epsilon_{i'j'\cdots z'} a_{i'}^1 a_{j'}^2 \cdots a_{z'}^n = \Delta(b^1 \cdots b^n) \Delta(a^1 \cdots a^n)$$

となる。このことは. $C = B \cdot A$ なる行列の行列式 $\Delta(C)$ は. B の行列式 $\Delta(B)$. A の行列式 $\Delta(A)$ の積であることを示している。即ち

$C = B \cdot A$ なら $\quad \Delta(C) = \Delta(A \cdot B) = \Delta(B) \cdot \Delta(A)$

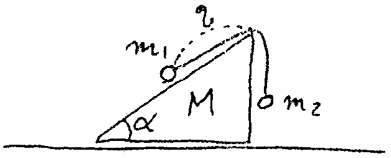
演習問題 3



(1) 長さl，質量mが一様な密度$\rho(=m/l)$で分布し，自由にまがり得るひもを図のように，なめらかな釘にかけて手を放したときの運動を決定せよ［$x(t)$，$\dot{x}(t)$を決定せよということ］但し $t=0$ で $x=0$，$\dot{x}=0$とする。［（ヒント）ひものLagrangianは

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\int_0^{x}\rho g h\,dh+\int_0^{l-x}\rho g h\,dh=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\rho g h(x^2-x)+\text{const}$$

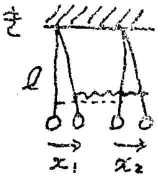
であることを示し，Lagrange方程式を作り，解け。この問題をLagrange方程式を用いず，高校で習った方法でといてみよ。］



(2) なめらかな水平面上に直角三角形のくさび（斜辺の傾き角α，質量M）に質量m_1，m_2なる2つの質点が長さlの糸で結ばれ，図のようにかけられている。くさびの頂点からm_1までの糸の長さを$q(t)$，くさびの重心の座標を$x(t)$とすればこの系のLagrangianは

$$L=\frac{m_1}{2}\left[(\dot{q}\cos\alpha+\dot{x})^2+(\dot{q}\sin\alpha)^2\right]+\frac{m_2}{2}(\dot{x}^2+\dot{q}^2)+\frac{M}{2}\dot{x}^2$$
$$+m_1 g q\sin\alpha\ \overset{-}{\cancel{+}}\ m_2 g q$$

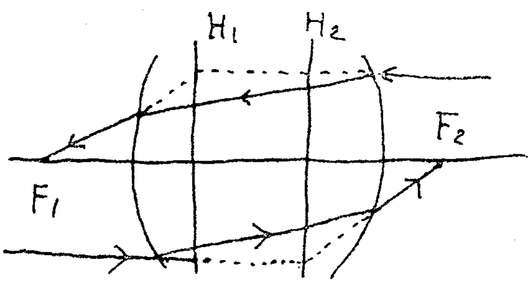
であることを示し，これを整理した上でLagrange方程式を作り，運動を決定せよ但し $t=0$ で $q=0$，$\dot{q}=0$， $x=0$， $\dot{x}=0$ とする。$M\to\infty$のとき解はどうなるか。この問題をLagrange方程式を用いず高校流にとけ。



(3) 同じ長さlの2つの振子が弱いバネで結ばれているとき この系のLagrangianは

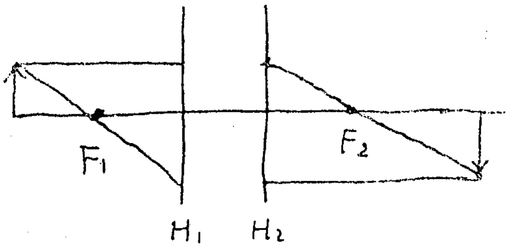
$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{mg}{2l}(x_1^2+x_2^2)-\frac{K}{2}(x_1-x_2)^2$$

で与えられるものとする。 $t=0$ で $x_1=x_0$，$\dot{x}_1=0$，$x_2=0$，$\dot{x}_2=0$ として運動を決定せよ。［（ヒント）x_1，x_2の代りに $q_1=x_1+x_2$，$q_2=x_1-x_2$ を新たに座標と考えればLは簡単になり，従ってL方程式は解きやすくなる］

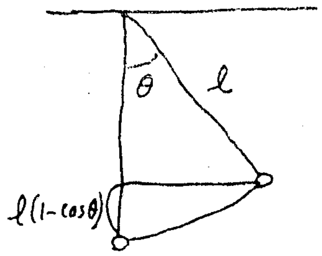


(4) 厚いレンズで軸に平行に入射した光線は焦点を通るが，焦点に向う光線の延長と入射光線の延長は主面の上で交ることを示せ。

このことから、厚いレンズでは、レンズをその実体よりも、むしろ二つの主面と焦点で代表すれば右の図のように薄いレンズの場合と似た作図によって像の位置や倍率を求めることができる。作図のルールをのべよ。



(5) 講義では厚いレンズの公式をFermatの原理から導いてみせたが、境界面で屈折の法則を適用することによっても、同じレンズの公式が導けることを示せ。



(6) 図のように単振子の全エネルギーは正確には

$$H = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$$

or, $$\frac{H}{ml^2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\frac{g}{l}\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{2l}\theta^2 - \frac{2g}{4!l}\theta^4 + \cdots$$

であり、調和振動子のハミルトニアンと見なせるのは θ^4 以上が無視できる場合である。この近似を行わないときは

$$t = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta/2}\frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$ 但し $\sin^2\theta_0/2 \equiv \frac{H}{2mgl}$

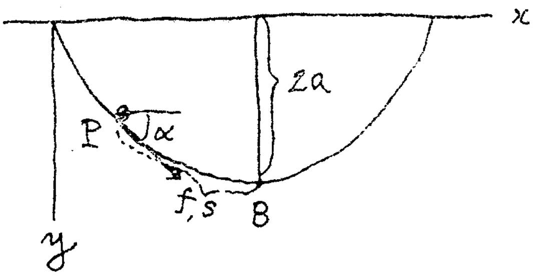
であることを示せ。 $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin y$ とすれば、振子の周期Tは

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}} \qquad k \equiv \sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\left[1 + \frac{k^2}{2}\sin^2 y + \frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)}{2!}k^4\sin^4 y + \cdots\right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4 + \cdots\right]$$

で与えられることを示せ。 $\theta_0 = 60°$ のとき、T は $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と何%ちがうか?



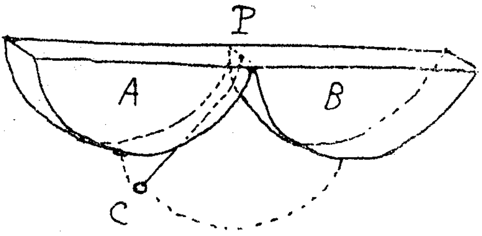
(7) 図のようなサイクロイドの斜面を滑る質点は、振幅の大小に拘らず、厳密に等時性を示すことを証明せよ。[(ヒント) サイクロイドの方程式を

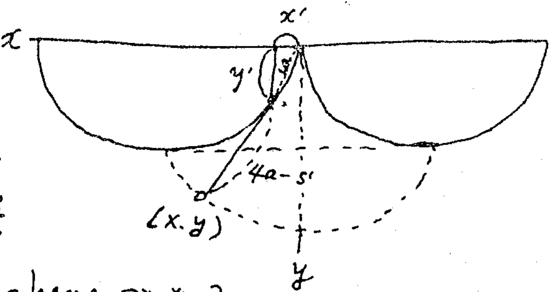
$x = a(\theta - \sin\theta)$ $y = a(1-\cos\theta)$

$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -4a\,d\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$、従って底Bから質点Pまでの弧の長さは $S = -4a\cos\frac{\theta}{2}$、点Pにおける

切線の傾き $\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \cos\frac{\theta}{2}$, 重力の切線方向の成分 $f = mg\sin\alpha$
$= mg\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{mg}{4a}s$　　$m\ddot{s} = f = -\frac{mg}{4a}s$]

(8) A. Bは同じサイクロイドを切抜いた板である。A. Bの底を図のように水平に固定しそれらの切点Pからサイクロイドの全弧の長さの半分の糸におもりCをつけて吊す。Cを振ると糸がサイクロイドの板にからむように振動する。このときCの軌跡はA. Bと合同なサイクロイドであることを示せ。

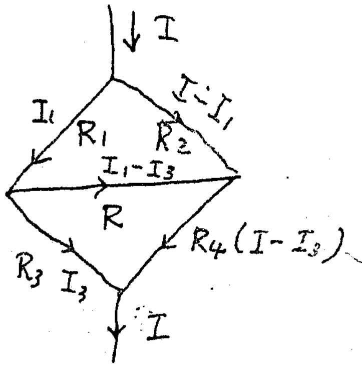




[(ヒント) 糸と板の切点を (x', y'), Cの座標を (x, y) とすれば $x = x' + (4a - s')\frac{dx'}{ds'}$
$y = y' + (4a - s')\frac{dy'}{ds'}$ であることに注意せよ。サイクロイド振子の発明者は C. Huyghens である。
Horologium Oscillatorium, Paris 1673.]

(9) 右の図のような回路に、記入されている電流が流れているとき、単位時間に回路に生ずるジュール熱

$$Q = R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2 + R(I_1 - I_3)^2 + R_3 I_3^2 + R_4 (I - I_3)^2$$



を極小ならしめるように I_1, I_3 を決定し、それがオームの法則を用いて決定した実際に流れる電流に一致することを示せ。[回路には発生するジュール熱を最小ならしめるかの如く電流が分布する！]
この方法によって I_1, I_3 を求め、ブリッジを流れる電流 $I_1 - I_3$ を求めよ。　$R_1 I_1 + R_3 I_3 = V$ とおき、これにいま求めた I_1, I_3 を代入すれば $V = \mathcal{R} I$ の形の式を得る。$\mathcal{R}$ は全回路の電気抵抗と考えられる。$\mathcal{R}$ を求めよ。